数学方法论丛书

中国古代数学思想方法

王鸿钧　孙宏安　著

江苏教育出版社

1988·南京

数学方法论丛书
中国古代数学思想方法
王鸿钧 孙宏安 著

出版发行：江苏教育出版社
经 销：江苏省新华书店
印 刷：南京人民印刷厂

开本850×1168毫米 1/28 印张5.75 字数132,500
1989年5月第1版 1989年5月第1次印刷
印数1—3,900册

ISBN 7—5343—0663—9

G·584 定价：2.15元（贴塑）

出版说明

如大家所知，数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问，已有很长的历史，而且内容极为丰富。16世纪以来，如笛卡尔（Descartes）、莱布尼兹(Leibniz)、庞加莱(Poincaré)、克莱因(Klein)、希尔伯特(Hilbert)和阿达玛(Hadamard)等著名学者，都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解，就近现代而言，以著名的美籍匈牙利数学家波利亚(Polya)为例，他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究，出版了一系列论著，并被译为多种文字，受到全世界的普遍重视，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国，也有许多学者在各种不同的场合屡次指出：要在数学教材与教学过程中，注意对形成数学概念的认识过程的分析，努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段，特别是我国数学家徐利治教授，他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流，结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状，深感在教学与科研领域中，有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下，我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课，出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物，这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来，在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练，对于如何教给学生以寻找真理和发现真理的本领不够重视，在一定程度上低估了发

散思维的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究，并且把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去。特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍，因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自1986年初就开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》（以下简称《丛书》），并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月，我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问，我们深信，在《丛书》的全体编委的共同努力下，一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》，我们也由此而希望，《丛书》的出版，能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其他两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，《丛书》中的大部分题材，对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年6月

前　言

我国古代数学思想方法，源远流长，独具风格，硕果累累，成就辉煌。可是关于中国古代数学思想方法方面的专著国内尚付阙如。美国克莱因(Klein)的《古今数学思想》是1000多页的大著，对中国古代的数学思想竟不置一言。苏联亚历山大洛夫(Александров)等人写的三卷本《数学——它的内容、方法和意义》也只涉及只言片语。我早年有志于数学思想方法问题的探讨，积累了数十万字的笔记资料和手稿，惜乎"文革"中被查抄，已荡然无存。"文革"期间，我在劳动和病休中又写了30万字的高等数学思想方法论手稿，曾经徐利治教授审阅，承蒙他提出许多宝贵的意见，我深受启发和鼓励。1982年以来，给研究生讲授了几遍数学方法论课程，又积累了一些资料，去年赴日本参加"中日数学教育研究会"，我提出有关《九章算术》的数学思想方法的一份报告。今春江苏教育出版社委托徐利治教授主编"数学方法论丛书"，蒙邀参与编委会工作，并约我写《中国古代数学思想方法》一书。我即按出版社和主编提出的要求写出该书的提纲，同我的助手孙宏安同志一道整理手稿，进一步核实资料，几经推敲，两易其稿，勉力完卷。由于时间和篇幅有限，更主要是我们的水平有限，用10万字来概述中国古代的数学思想方法，深感力不从心，不周和欠妥之处在所难免，欢迎批评指导。愿这本小册子起到抛砖引玉的作用，如能为继承和发扬我国古代数学思想方法起一点哪怕是微不足道的作用，就

满足了我们的愿望。

谨向江苏教育出版社和发起数学方法论丛书的同志们、向主编徐利治教授热情鼓励并支持对我国古代数学思想方法研究的精神表示钦佩和衷心的感谢!

王鸿钧

1987年11月于大连

绪 论

我们伟大的祖国有着光辉的历史、灿烂的文化。

我国位于北半球、亚洲东部，太平洋西岸，东西跨越了五个时区，南北横穿了约50多个纬度。我国东部和东南部面临着浩瀚的海洋，西部蜒蜓着巍峨的高山及号称“世界屋脊”的青藏高原，北部是蒙古高原的戈壁和林海。这些在古代交通不发达的条件下，形成了相对的封闭状态，使我们的祖先与外界存在着交往的困难。因而使我国古代文化，在相当时期内保持着自己鲜明的特色。

中国古代文化的特点，与我们的先人进入文明时的自然历史条件有着密切的关系，在一定程度上可以说，前者就是由后者决定的。

中国古代文明是一个大河背景下的农耕文明。在我国辽阔的土地上，大河纵横，河两岸沃野千里，便于农业的发展。中国古代文明最早产生于大河(黄河、长江等)流域的河谷地带。在农业经济中水源成为关键，要求有一个凌驾于各个部落之上的力量来协调水源的使用；周期性的洪水泛滥又使治水成为沿河居民生死存亡的头等大事，治水要求全体居民的共同努力，因此就需要有一个超乎各个部落的统一的意志，这种实际需要实际上就产生了特殊的结果。一是使中国自进入文明起就成为一个大领土国家，并且形成了集中的王权：商代是“尺地莫非其有也，一民莫非其臣也”(《孟子·滕文公上》)，周代则是“溥天之下，莫非王土；率土之滨，莫

非王臣"(《诗经·小雅·北山》),即主要生产资料(土地)和主要生产者(奴隶)都属于奴隶制国家所有。商、周已产生了至上的王权。到了秦汉更形成一个大一统的中央集权的封建专制主义国家。二是使中国早早地进入了文明时代——在古代的氏族血缘纽带尚未瓦解时就进入了奴隶制社会①。这种血缘纽带在中国文明的特定条件下不但没有受到冲击和削弱,反而变得极其稳定和强大,在其后的漫长历史进程中,经历了各种经济政治制度的变迁,终奴隶社会和封建社会的数千年历史,以血缘宗法纽带为特色,以农业家庭小生产为基础的社会生活和社会结构少有变动,表现出极度的稳定性和保守性。古老的氏族社会的遗风余俗、观念习惯长期地保存、积累下来,成为一种极为强固的文化结构和心理力量②。中国古代文化就是在这种文化结构和心理力量中产生和发展起来的。

由于这种文化结构和心理力量,中国文化发展的民族连续性为世界上所仅见。中国古代有着发达的科学技术,例如举世闻名的四大发明——造纸术、印刷术、火药和指南针——对人类文明的发展做出了重大的贡献。数学作为文化和科学技术的一个重要组成部分,在中国古代也取得了光辉的成就,许多数学成果具有世界历史性的重大意义。而且中国古代数学也是在中国古代独特的文化背景中产生和发展的,其独特的思想方法也是古代文化中的珍品,对现代数学的发展有着重要的意义。本书着重探讨中国古代数学思想方法的特点。

中国古代数学思想方法的发展过程是相当长的。如果从

① 肖萐父等:《中国哲学史》(上),人民出版社,1984年。

② 李泽厚:《中国古代思想史论》,人民出版社,1985年,第299页。

对数与形的原始思维产生来考虑，可以追溯到遥远的古代，出现比较完善的十进位值制记数法也有3000多年了。数学思想方法的启蒙时期大约是在春秋战国时代。秦汉之际的《周髀算经》和《九章算术》奠定了中国古代数学思想方法的基础，尤其《九章算术》承前启后，开辟了中国古代数学思想方法的新纪元。由汉代经历漫长的历史发展到唐代的大一统帝国，数学思想方法基本上是对《九章算术》思想方法的继承和发展。隋唐时期在国子监内设“算学馆”，立数学博士、助教等学官、规定《算经十书》为教科书，唐代还在科举考试中设“明算科”，这些对数学教育的发展、数学科学的普及产生了积极的影响，从而为数学思想的发展，创造了有利的条件。到了宋代，结合印刷术、火药、指南针的发明和工商业的大发展，出现了宋及元初数学思想方法发展的新阶段，并在数学上取得了一系列光辉的成就，使这一时期的中国数学，达到世界封建社会数学发展的高峰。其中一些重要的数学成果，要比西方取得同类成果早数百年。可是，好景不长，在元朝中叶，宋元之际达到高度发展的数学理论突然出现停滞和“中断”，高度抽象的重要数学成果渐次失传，数学转向了适应商业发展需要的以珠算为工具的各种简单计算方法方面。由于对中国古代数学这一“中断”的研究是数学史以至于文化史上的一个重要课题，需要更专门的探讨，本书就写到14世纪初朱世杰的数学思想方法为止，关于“中断”及进一步的问题留待以后探讨。

明清两代正是西方文艺复兴和资本主义社会发生和发展的时期，中国却由一个庞大的封建帝国渐次沦为一个半殖民地半封建的国家，数学大大地落后了，数学思想方法也无大进展。新中国成立以后，百废俱兴，数学也取得了迅速的发

展。尤其是十一届三中全会以来，振兴中华，实现四化，建设富强、民主、文明的社会主义现代化国家，成为10亿人民的共同心愿。我们完全相信，在建设有中国特色的社会主义宏伟行动纲领的指引下，我国古代的数学思想方法，必将发扬光大，真正成为我国和世界数学思想发展的重要源泉，把现代数学思想方法的发展推向一个新高峰。

目录

一 古老的数学思想

中国古代的数学思想方法是扎根于古人的社会实践之中的。中国古代生产方式的特点决定着中国古代数学思想方法的特点，特别是生产实践起着关键性的作用。当然，数学思想方法也反过来推动着生产和其他社会实践的发展。我们来考察中国古代最古老的数学思想。

1.1 数和形的原始思维

数学中最古老的，可以说是原始的概念就是“数”（自然数）和“形”（简单几何图形）的概念。它们的形成和发展也标志着数学思想方法的开端。数和形是反映现实世界的量的关系和空间形式的“原子”和“细胞”，由它们开始，逐渐发展成完善的数学体系。实际上，其他所有的数学概念也确实是在数和形的概念的基础上形成的。因此，探讨人们如何形成数和形的原始思维，可以作为探讨古老的数学思想的出发点。

数学的原始思维来源于数学的对象，更确切地说，来源于现实世界。但是，数学的原始思维并不是现成地存在于现实世界中等待我们去取来，自然界中既没有数也没有形的概念。数和形是人作为认识主体对现实世界的反映，是人的思维的产物，亦即“思想事物”。人类是怎样反映外部世界，怎样形成数学的原始思维的呢？必须通过主体和客体的联系环节——人的社会实践。就是说，数学原始思维是产生于人类

的实践活动中的。

原始人的第一项需要就是谋取物质生活资料以使自己生存下去并延续后代，所以人类的生产活动是最基本的实践活动。这一活动是向自然界"索取"的活动，在这一活动中，人们必须与自然界进行交往，在这种交往中人们才能认识自然界的种种性质，包括认识自然界的量的关系和空间形式，经过人脑的能动的认识活动，便形成了数学的原始思维。

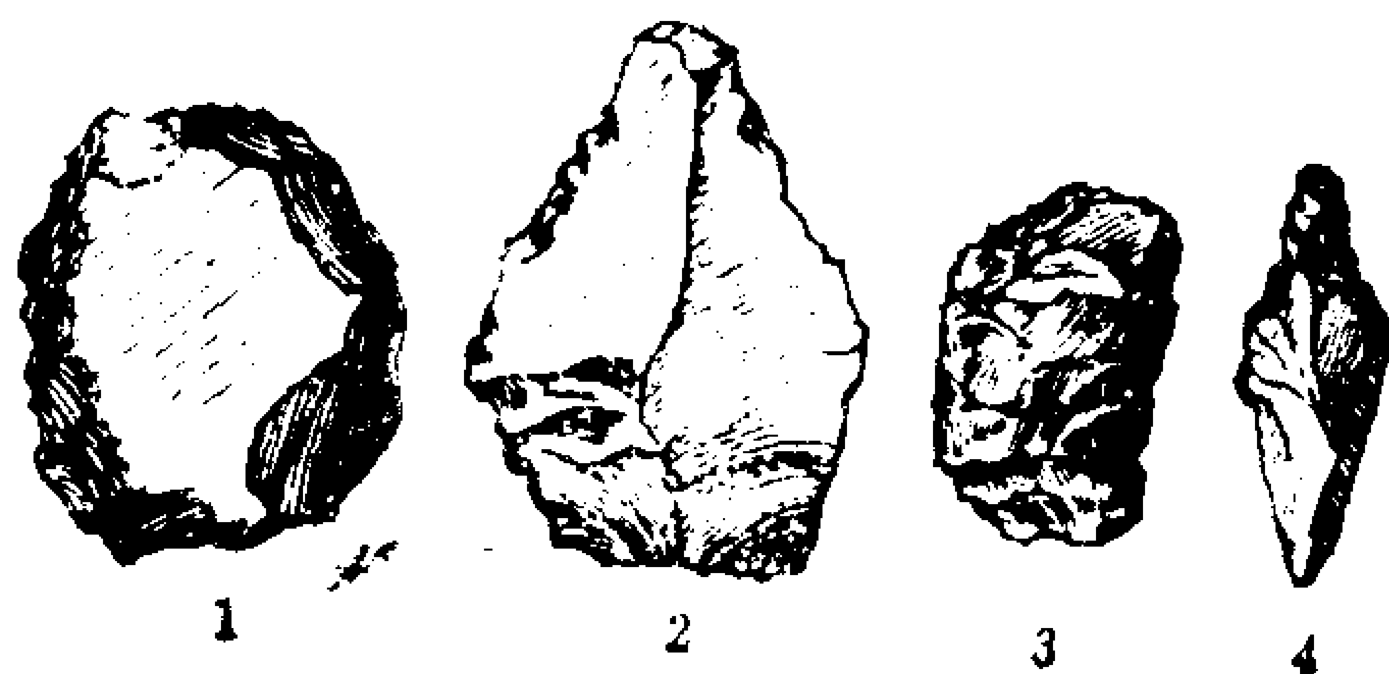
在探讨数学的原始思维时，必须顾及两个重要的前提。一个前提是人们的实践活动使人们对客观存在的事物有了广泛的认识，人们的社会实践提出了认识数和形的必要性；另一个前提是人们有了一定的抽象思维能力，能够在改造世界的实践活动中，抽象出数学的原始概念。这两点都是在人们的实践活动中实现的。

中国古人在进入文明以前就已经产生了数和形的原始思维。考古学上的许多发现，向我们提供了大量信息，这些信息表明，在中国，在五六千年以前的原始社会中就产生了数和形的原始思维。我们以这些信息来考察中国古人关于数和形的原始思维。

1.北京人的石器

北京人是旧石器时代早期的人类，距今约70万年——20万年，北京人居住在北京周口店龙骨山的洞穴中。在北京人的遗址中发现了10余万件石器。其中有砍斫器，尺寸较大；有刮削器，有盘状、直刃、凸刃、凹刃等多种形状；还有尖状器和雕刻器，数量少些，但制作精细。还发现用来加工石器的石锤和石砧。石器的加工程序和打制方法比较固定，反映出一定的技术水平①。其石器形状如图1.1所示 。

① 《中国大百科全书·考古学》，中国大百科全书出版社，1936年，第37页



北京人的石器

1 盘状砍斫器 2 砍斫器 3 矩形刮削器 4 石锥

图1.1

要制成这种种形状的石器，北京人除了观察过大量自然物的形状、大小外，在他们的头脑里还一定有着关于形的某种表象，正是这些表象通过实践，转化为他们制造出来的各种形状、各种大小的石器，这表明北京人对形已有了一些认识。

2.许家窑人的石球

许家窑人，发现于山西省阳高县许家窑村和河北省阳原县侯家窑村之间，距今约10万年。在遗址中发现石制品14000余件，且20%为石器，其中石球达1074个，数量之多，为世界所仅见。石球中最大的直径超过100毫米，重量超过1500克；最小的直径在50毫米以下，重量不到50克。其中既有制作得滚圆的成品，又有半成品和毛坯，从中可以清楚地看到制作石球的全部工艺过程①。据推测，石球是一种狩猎工具。

① 《中国大百科全书·考古学》，第589页。

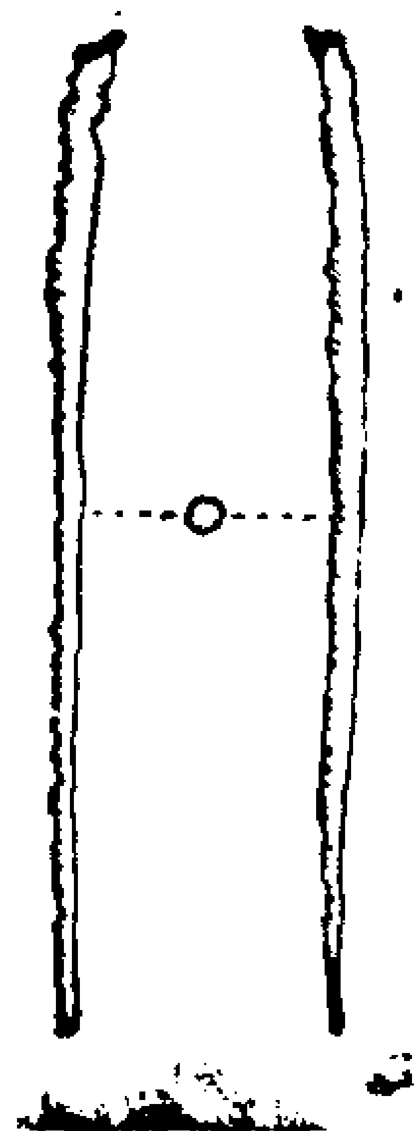


图1.2

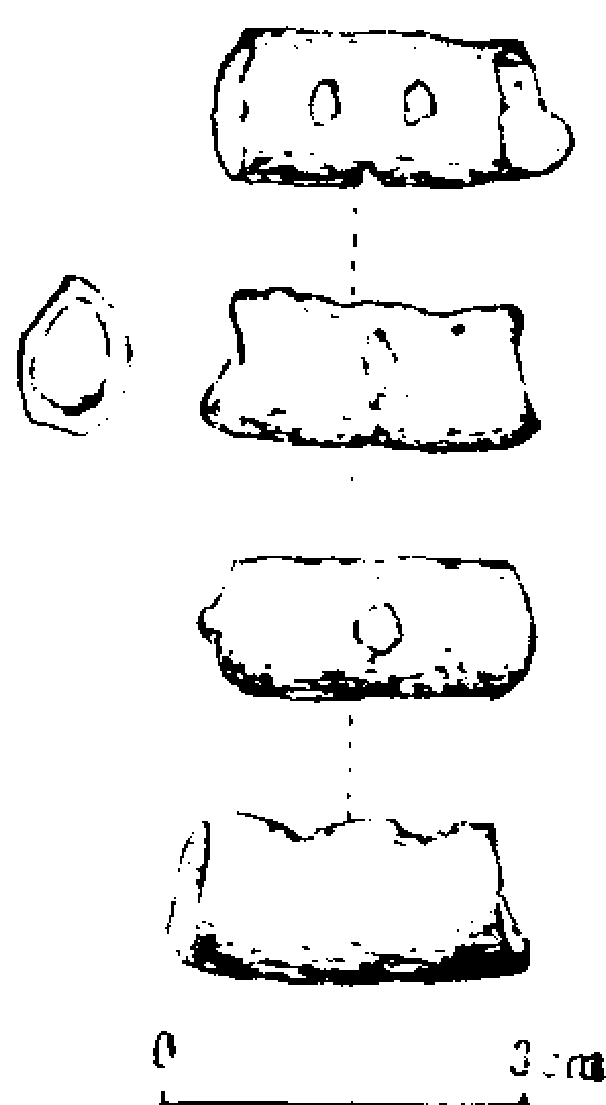


图1.3

这样大量而集中地制造石球，说明了当时人们在制造工具的社会实践中产生了对"球形"的进一步的认识。

3.山顶洞人的骨针和骨管

山顶洞人（发现于北京周口店龙骨山的山顶洞穴中，即居住于北京人遗址的上方，距今约18000年）的遗址中出土石器25件，还出土一枚精致的骨针，磨得很圆，呈较规则的圆柱状(图1.2)。此外，还出土2000多件用砾石和动物骨胳、牙齿、海蚶壳等制成的各种形状的装饰物。其中有四只骨管，刻着大小不等的豁口(如图1.3所示)。骨管上的豁口，最少有两种解释。一种认为，可能是记事的符号，大事刻大豁口，豁口的排列顺序，表示事件发生的顺序；另一种认为，可能是数学记号，小豁口表示一个单位，大豁口表示10个单位①。这表明山顶洞人已具有十进制的思想或顺序的思想，他们已能区分前后，识别简单的数目了。

① 李迪：《中国数学史简编》，辽宁人民出版社，1985年，第5－8页。

4.仰韶文化的数、形观念

仰韶文化（中国黄河中游地区的新石器时期文化，因最早发掘的河南省渑池县仰韶村遗址而得名）的遗址现已发现1000多处，其中大规模发掘的典型遗址有10余处，年代约在公元前5000—前3000年之间。遗物中的石器已有十分规则的形状，表明当时的人类已经有了“对称”、“平行”、“等距”等抽象的观念。

仰韶文化时期还发明了陶器。这是人类工具制造史上的一次重要的飞跃，表明人的生产力有了很大的提高，也表明人的思维能力有了巨大的发展。要用一些形状不固定的泥土制成具有某种形状、一定大小的陶器就一定要在头脑中先有一个“形”的表象。人们制造的陶器都有比较规则的几何形状，它们实际上都可以看作是人们的“几何图形”观念的实物模型。仰韶文化中的陶器有各种各样的形状和大小，说明当时的人已经具有了多种几何图形的观念了（见图1.4）。



图1.4

仰韶文化的一大特点，是制成了彩陶，因此有时也称为彩陶文化。彩陶上一般都绘有图案。例如动物图案或"几何纹"图案（见图1.5），这是一种真正的几何图形，它表明人们已由现实的物体的形状、大小中抽象出其集合的类的特点，形成了"形"的概念。

半坡遗址（陕西省西安市东郊半坡村出土，距今约7000—6000年，也属于仰韶文化系统）出土一种陶器，是用来隔水加热食物的，在其底部有排列整齐的洞眼，这些洞眼呈正三角形，共分九层，开始是一个洞，然后每层递增一个洞，按层数下去，正好是 1，2，3，4，5，6，7，8，9，九个数目（如图1.6所示），表明当时已有了关于这些数的初步



图1.5

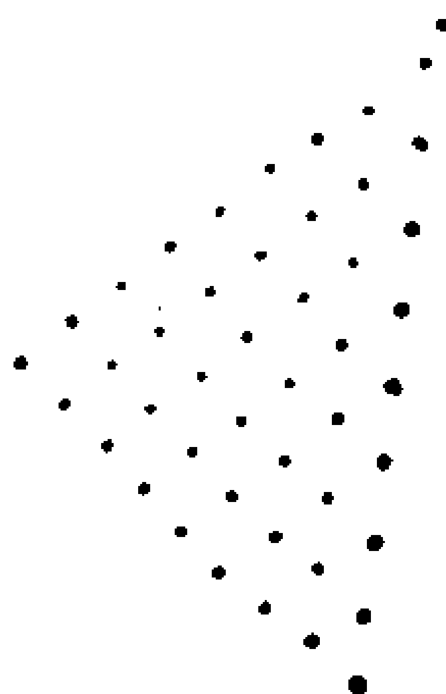


图1.6

观念。半坡还出土一个画有鱼网的陶碗，网绳纵横都是10条，表明人们已有了十进位数制的思想。同时，在半坡出土的陶器上已发现许多刻符，人们认为其中包括了一些数字，例如"×"(5)、"∧"(6)、"+"(7)、")("(8)、"丨"(10)、

“‖”(20)等①。与半坡文化时期相近的陕西姜寨遗址出土的陶器上也有类似的刻符②。这些已是“真正的”数字，说明当时的人类已形成了初步的数的概念。

由上述可知，中国古人对数与形的原始思维都是在原始社会中实现的。在这些原始思维中不仅形成了数和形的概念，而且产生了十进位的思想，这可以说是十进位值制的先导。由此开始了中国古代数学的发展历程，同时，也开始了中国古代数学思想方法的发展。

1.2 甲骨文与十进位值制记数法

甲骨文是商周时代刻在龟甲和兽骨上的文字，最早在河南安阳市北小屯村的殷墟出土，属于大约公元前14世纪—前11世纪的文物。现在出土的刻字甲骨已有15万余片，甲骨单字已有4500个，其中已辨认了2000余字。1976年，在陕西周原等地也发现了西周早期的甲骨1700多片，刻有文字的有190余片。甲骨文中有着关于中国古代十进位值制记数法的雏形。

1.甲骨文数字

如1.1节所述，在仰韶文化中就已产生了十进位数制的思想，并创造了一些数字。在甲骨文中十进位值制记数法正式完成，已出土的甲骨文中找到了完整的记录。

一片甲骨（见图1.7）上刻有1至9九个数字。其他甲骨文中也多次出现数字，除了个位数字外，还有更高级的单位

① 王志俊：《关中地区仰韶文化刻划符号综述》，载《考古与文物》，1980年，第3期。

② 李迪：《中国数学史简编》，第11页。

数十、百、千、万等。甲骨文中已发现的最大的数是3万，这已经不是单纯的计数所能达到的了，它是确定的记数法的产物。

甲骨数字如图1.8所示，其中20，30，……，200，300，……，等等不是个位数与整单位数的数字叫“合文”，多由个位数和单位数组合而成，汉代取消了这种合文。

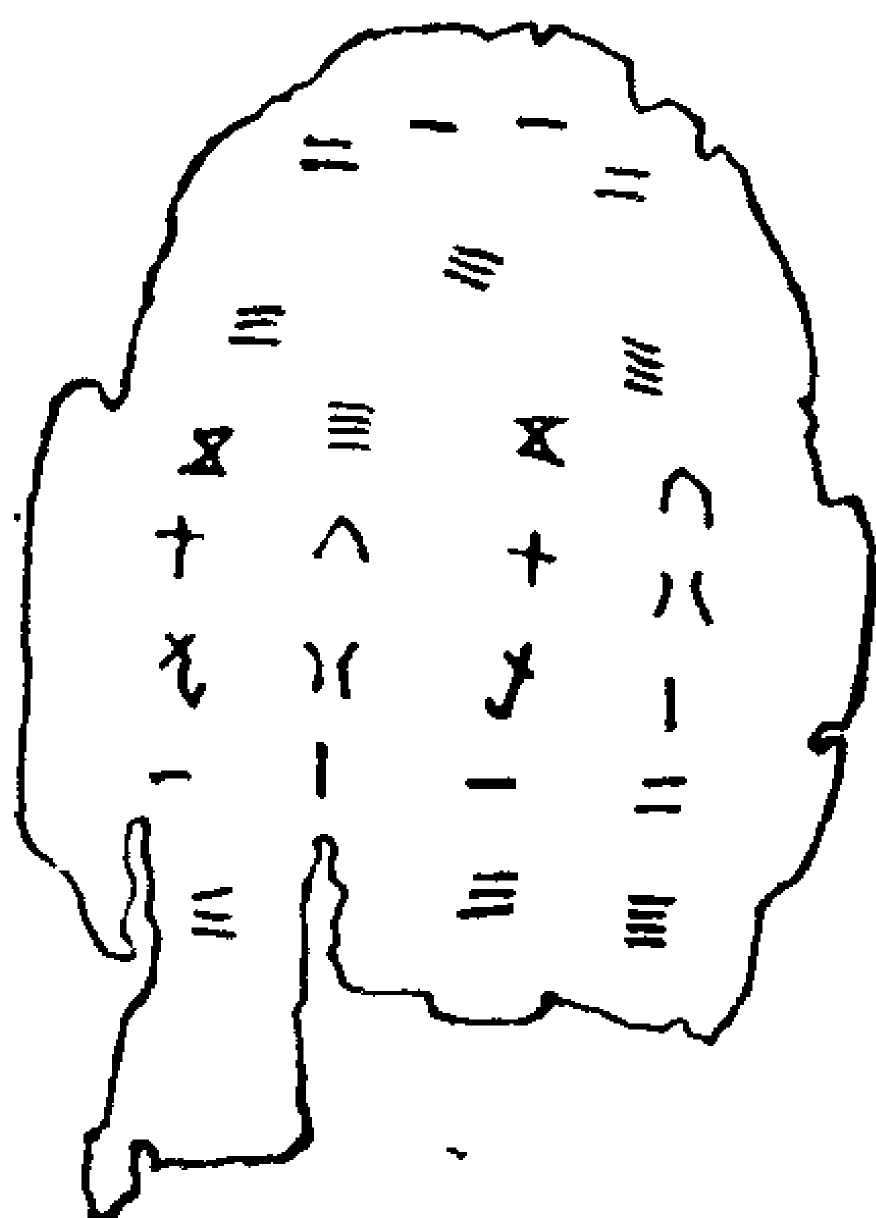


图1.7

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

20 30 40 50 60 70 80 90 100

200 300 400 500 600 800 900 1000 2000 3000 4000

5000 6000 8000 10000 30000

图1.8

甲骨文中的数字是采用了十进位值制记数法的，十、百、千、万等实际上只是一种“数位”记号（当然，它们单独用也表示数10、100、1000、10000等），每一数位上的数（表示有多少个有关的单位数），仍然用个位数字。例如“𢦏𦉭亠宀”就是“2656”之意。可见十、百、千等确是“数位”记号。后来，人们在记数时略去这种记号，例如把2656表示为“二六五六”，就实现了完全的位值制。位值制记数法的优点是可以用少量数字表示出任意数，并使人们能方便地进行数的运算。甲骨文中实际上就是只用一到九九个数字和十、百、千、万等几个表示“数位”的字记出一切数的。安阳殷墟还出土了商代的骨尺和牙尺，尺面上有相当于“寸”、“分”的刻度表示，它们都是十进的①，说明了十进位值制记数法与社会生活有着密切的联系：一方面，由于社会生活需要提高度量衡的精度，要求不断划小度量衡的单位；另一方面，它简便适用，在实际生活中得到广泛应用。这是中国古代数学思想发展的一大特点。

现在世界通用的印度-阿拉伯数字记数法就是十进位值制记数法，可见这种记数法是先进的、具有强大生命力的。中国古代产生数字之初就采用了十进位值制记数法，这是中国古人对世界数学的一大贡献。其他著名古代文明地区也很早就产生了数和数字，但却未能产生系统的十进位值制记数法。例如两河流域公元前5000年就有了人类的文明活动，很早就有了数字和一定的数字体系，也采用了位值制，却是60进位的。古埃及人很早就建立了十进位记数法，却没有使用位值制，因此每高一位要换用一次新的数字。

① 《中国大百科全书·考古学》，第659页。

2. 干支记日法

对时间的认识是人类最重要的科学认识之一，“日”则是人类最早认识的时间单位。最明显的自然的周期变化——日出日落——就使人们逐渐产生了“日”的概念。有了日概念，人们就开始计数日期。计数日期实际上考察的是一种“顺序”，数(自然数)也用来标示(反映)顺序，所以计数日期的方法与数学有着密切的关系。

中国古代有据可考的最早的记日方法是干支记日法。干，指天干，它由“甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸”10个字组成。支，即地支，用“子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥”12个字表示。一个天干字配一个地支字，就组成一对干支。天干以“甲”字开始，地支以“子”开始，按此顺序组合，可得60对干支，称“六十甲子”，其配合和所表示的序号如表1.1所示。

表1.1　　六十甲子表

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲子	乙丑	丙寅	丁卯	戊辰	己巳	庚午	辛未	壬申	癸酉
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
甲戌	乙亥	丙子	丁丑	戊寅	己卯	庚辰	辛巳	壬午	癸未
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
甲申	乙酉	丙戌	丁亥	戊子	己丑	庚寅	辛卯	壬辰	癸巳
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
甲午	乙未	丙申	丁酉	戊戌	己亥	庚子	辛丑	壬寅	癸卯
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
甲辰	乙巳	丙午	丁未	戊申	己酉	庚戌	辛亥	壬子	癸丑
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
甲寅	乙卯	丙辰	丁巳	戊午	己未	庚申	辛酉	壬戌	癸亥

干支记日法即按表中甲子到癸亥，再重复甲子到癸亥等等，每对干支表示一天，循环使用。殷墟甲骨文已采用了干支记日法。据考证，中国古代自春秋时期鲁隐公三年（公元前720年)二月己巳日(这天发生一次日食)起就开始使用干支记日法连续记日，直到清朝灭亡(1911年)，2600年间从未间断过①。干支还用来记月，但不长时间就废止了。干支记年始于东汉初年，以后从未间断，直到现在②。例如公历1988年，我国的日历上还印有“戊辰年”字样，就是说，公元1988年，是农历干支记年法的戊辰年。

干支记日法本身就是一项数学成就：对顺序的认识，具有组合方法的初步思想。同时，它对后来的天文历法计算产生了巨大的影响，从而对数学思想方法也产生了一定的影响。

3.算、祘、数、筹、策等字的古义

算、祘、数、筹、策等字是与数学和数学思想都有关系的汉字，它们的产生也与表述数学思想方法有关，它们与甲骨文亦有渊源关系。

算，古人称数学为算学。《说文解字》说，“数也”。指的是计数之意，后来也引申为数(sū，名词)，并且还有“数学”的意思。此外，“算”也通“筭”(suàn)，意为“古代计数用的筹码”，即算筹。

筭，《说文解字》说：“长六寸，计历数者。从竹从弄，言常弄乃不误也。”《类篇》说：“数也”。由此可见与算是同义的，指算筹。“祘”，是“筭”的古字，是会意字，“从二示”，有占卜之意，所以“筭”亦有“演”(算)卦之意。

---

① 李一氓：《中国古代文化史讲座》，中国广播电视大学出版社，1934年，第24页。

② 漆贯荣：《时间》，科学出版社，1985年，第20页。

数，是一个多义词，除了“数者，一十百千万也”外，还有“数学”(算术)，“自然之理”，“技术、方术”，“气数即命运”等义。

筹，《正韵》说：“筹，算也”。《辞源》载：“故曰筭、曰筹、曰策，一也。”它有两义，一是指计算或记数的工具，即算筹；二是指计谋或策划。当然在古代，策划往往也与占卜有关。占卜也是一种“演算”(见下节)。

策，一义为“古时用以计算的小筹”，一义为“古代占卦用的蓍草”。可见古时算筹和蓍草可能就是同一个东西，至少有共同的起源。

由这些字的古义探讨，不难发现，它们所表示的词与社会生活，尤其计划和占卜，有着极密切的关系，算筹计算产生于现实生活的需要。中国古代的数学思想方法就是从这些生活实际(尤其是管理、计划和占卜)中发展起来的。

1.3 《周易》的数学思想

《周易》是古代的一本讲卜筮（shī，用蓍草占卜）的书，它与《诗三百篇》、《尚书》、《礼记》、《春秋》等几部古典著作合称《五经》，是中国封建社会学校教育的法定教科书，也是汉代以来，2000多年的封建社会维系封建宗法制度的理论基础，因此受到高度的重视。它们对中国古代文化思想产生了重大的影响。其中《周易》为《五经》之首，因而有着极其重要的意义。

从中国古代思想史和科学史的角度来看，《周易》还有特殊的意义。它的内容十分丰富，包含有涉及天文、数学、音律、医学等自然科学和政治、历史、逻辑、伦理、法律等社

会科学以及哲学的内容。因而，对《周易》的研究促进了这些科学的发展。同时，这些科学的发展也就受到《周易》的重要影响。由于对《周易》的高度重视，各个学派都与《易》学有一定的联系，使得《周易》对中国古代哲学、文化和科学思想都产生了极其巨大的影响。

中国古代的各种科学研究，都或多或少地打上了《易》的烙印。例如天文学研究中，《周易》一直是指导性理论。而在数学（"数术"）研究中，《周易》更有着特殊的意义：中国古代数学著述在其序言中几乎都要指出自己与《周易》的关系，通常还要引证《周易》上的话作为自己著述的张本。实际上，《周易》本身就包含有丰富的数学思想。

《周易》，又称《易经》，或简称为《易》。"周易"一词的词义为"日月之道普照周天"①。《周易》的内容包括《经》和《传》两部分。《经》亦称《易经》，是古代的占卜用书，是通过爻卦的变化来预示吉凶的。所谓爻（yāo）是卦的基本符号，用"—"表示阳爻，"--"表示阴爻，每三爻合成一卦，可得（$2^3=8$）八卦，叫做"八经卦"。用爻符号表示出的卦叫卦画，每一经卦都有名称，它们是乾☰、坎☵、艮☶、震☳、巽☴、离☲、坤☷、兑☱。

八经卦中每两个相叠合（可以重复），又组成$8^2=64$个"别卦"，《易经》就是探论这64个别卦的。经文中，每一别卦都有名称及相应的卦画，如䷀乾，䷂屯等。然后给出卦辞，即对卦的总的说明。每卦有六爻，每爻有爻题（爻的名称）和爻辞（对每一爻的意义的说明）。爻题都是两个字，一个字表示爻的性质——是阳爻还是阴爻，阳爻用"九"，阴爻用"六"；另一个字表示爻的次序，自下而上，分别称为初、

① 刘大均：《周易概论》，山东人民出版社，1986年，第3页。

二、三、四、五、上。爻辞实际上是各爻占卜的结果。卦辞和爻辞是各卦的主要内容。以《易经》中的"乾"卦为例：

☰　乾：元亨，利贞。

初九　潜龙，勿用。

九二　见龙在田，利见大人。

九三　君子终日乾乾，夕惕若厉，无咎。

九四　或跃在渊，无咎。

九五　飞龙在天，利见大人。

上九　亢龙，有悔。

用九　见群龙，无首吉。

由于《易经》成书年代久远(殷商之际)，经文古朴简练，理解颇为困难，所以很早就有人对《易经》的文字作注释和发挥，相对于《经》而言，就称为《传》，《周易》书中的《传》共有10篇，包括《彖》、《象》、《系辞》等，也称为《十翼》。《传》约为春秋战国时人所作。《周易》很早就传到国外，17世纪以后，还被译成英、德、法等文字，引起学术界的浓厚兴趣。

1.古老的数字组合——"卦"是数表

《周易》的主要内容是64别卦，其核心则是八经卦。八卦从何而来呢？据甲骨文、陶器刻文和金文(铜器铭文)研究，八卦及64别卦实际上是一种特殊的数表——由各种数字组合而成。这种数表经过漫长的历史发展，逐渐演化为"卦"的形式。

人们最初是用数字的组合，来作成卦画的，这种"数字画"的产生方法，尚待研究。如四盘磨卜骨（河南省安阳殷墟四盘磨村西区1950年出土)刻有三组数字，如下图之左所示。按前面(图1.12)的甲骨文数字表，它们就是下图右边的数：

十 十)(　　七 七 八
)(⌛ ∧　　八 五 六
十 十 ∧　　七 七 六
∧ ∧ ⌛　　六 六 五
十 ∧)(　　七 六 八
∧ ∧ 十　　六 六 七

䷿ ䷋

这种数表是作什么用的呢？如果按数的奇偶分类，用后来的阳爻“—”代奇数、阴爻“--”代偶数，则得下述结果：

䷿ ䷋ ䷣

这里包括了八经卦中的☰，☷，☲，☵，乾坤离坎四经卦，它们配合成上述的三个数表为“未济”、“否”、“明夷”三个别卦。这三个别卦放在一处，一定是占筮到什么大事。就是说，这样的数表表示的是占卜的结果。

在殷墟及其他殷代遗址出土的一些陶器、铜器铭文上也发现不少类似的数表，数表中用了各种数字，但最多的“一”、“六”、“七”、“八”。各地出土的周代卜骨及陶器铭文、铜器铭文上也有类似的数表、逐渐地似以用“一”和“六”者增多。别的数字似有不用的趋势。如长安县张家坡出土西周卜骨上刻的数表为：

∧)(二X一（六八一五一）　X二∧)(一（五一六八一）　∧一∧∧∧一（六一六六六一）　一一∧一一一（一一六一一一）

现在的学者认为，表示占卜结果时用数，开始时几个数都用，因为二、三、亖易混、不多见，后来多用一、五、六、七、八、九，又相对集中使用一、六、七、八。到周初，就集中在一、六两个数字上。一表示奇数，读作“九”；六表示偶数，仍读“六”，这就是《易》“用九”、“用六”的原意。这时的一和六（“∧”）已具有符号的性质，即阳爻和阴爻的萌芽了。易定爻题，用九称阳爻，用六称阴爻，九成了一的称号，而“∧”字形渐变平，最后一分为二，成为“--”形式。于是完成了数字画向卦画的转化[1]。阴爻阳爻成了表示数的符号，卦画就是一个数字组合——一种数表。数表是用蓍草占卜的结果。按《周易》，是通过爻卦的变化来予卜未来，而爻卦的变化是通过数的不同组合实现的，因此，只要了解数的组合变化，通过数表就可以认知并解释天下万物了。

2.构成数表（卦画）的方法

卦画表示一个数表，数表中每个位置上取什么数是由占筮（用蓍草占卜）确定的，而占筮就是对若干蓍草进行“大衍”——演算。蓍（shī），蒿属多年生草本植物，用其茎占卜。

《系辞》中指出占筮的方法：“大衍之数五十，其用四十有九。分而为二，以象两，挂一，以象三。揲之以四，以象四时，归奇于扐，以象闰，五岁再闰，故再扐而后挂”，“十有八变而成卦”。除掉那些“象两（天地）”、“象三（天、地、人）”等神秘象征外，其演法如下：

用以占筮的蓍草共50根，但演算时只用49根。把49根蓍草任意（随机地，这一操作决定了占卜的结果）分为两部分，分握在两手中。从右手蓍草中任取一根，置于左手小指与无名

[1] 张政烺：“易辨”，见文集《周易纵横录》，湖北人民出版社，1986年，第190页。

指之间。以四根蓍草为一组，一组一组地分数两手中的蓍草（“揲之以四”，揲，dié或shé动词，阅持之意）。分完后，每只手中的蓍草必有余数，余一根、二根、三根或四根（正好数完为余四根）；将左手余下的蓍草置于左手无名指与中指间，将右手余的蓍草，置于左手中指与食指之间（“归奇于扐”、奇，零数：扐，lé，即“勒”之意）。去掉左手各手指间所“扐”的所有余数（只有五根或九根两种可能），手中还余44根或40根蓍草。此时就完成了用蓍草演算的第一道手续，即所谓“一变”。

用“一变”后得到的44根或40根蓍草，按上述演算方法再作一遍，此时，左手指间所“扐”的余数不是四就是八。去掉余数，可得40根、或36根、或32根，三种情况之一，于是完成了“二变”。

把“二变”后得到的蓍草再按上述演算法演一遍，左手指间“扐”的蓍草仍然不是四根就是八根，去掉它们，“三变”结束。经三变后，两手中余下的蓍草数只能是下列四种情况之一：①36根；②32根；③28根；④24根。

最后以四除之，就可确定一爻（三变成爻）：

$36 \div 4 = 9$ （老阳之数，以“—”表示）

$32 \div 4 = 8$ （少阴之数，以“--”表示）

$28 \div 4 = 7$ （少阳之数，以“—”表示）

$24 \div 4 = 6$ （老阴之数，以“--”表示）

揲蓍的目的，就是要得到这四个数之一，以便确定一爻。三变可定一爻。一个别卦有六爻，就要进行18次“变”才能得到，所以“十有八变而成卦”。成卦后就可以据“卦象”即卦画的形状和“辞”（卦辞和爻辞），来确定要占卜的行动的吉凶，以决定怎样决策。

从数学方面来考察占筮过程。它的特点有二：一是计算

程序确定；二是计算结果确定，必为6、7、8、9四个数之一。计算可以图示出来。

先定义两种运算：

运算P_1：$R_1+R_2=N$

$R_1-1\equiv r_1 \pmod{4}$

$R_2\equiv r_2 \pmod{4}$

运算P_2：$N=N-r_1-r_2-1$

下三个图（图1.9、1.10、1.11）分别给出三“变”的演算图示，引入一个P_1框表示进行一次运算P_1，引入一个P_2框表示进行一次运算P_2。

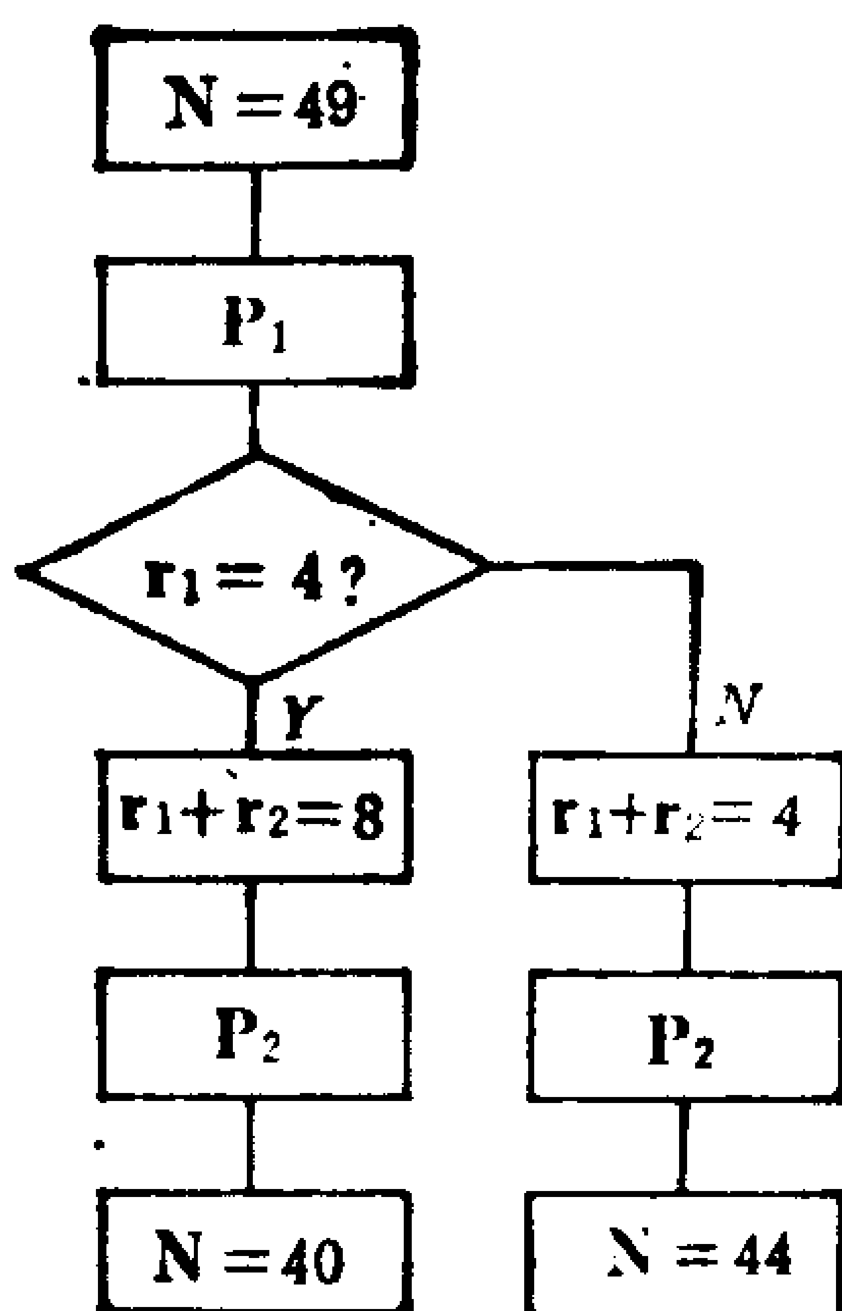


图1.9　一变

图1.12则给出最后“求数定爻”的程序。

从数学思想的角度来考察用阳爻“—”和阴爻“--”构造数

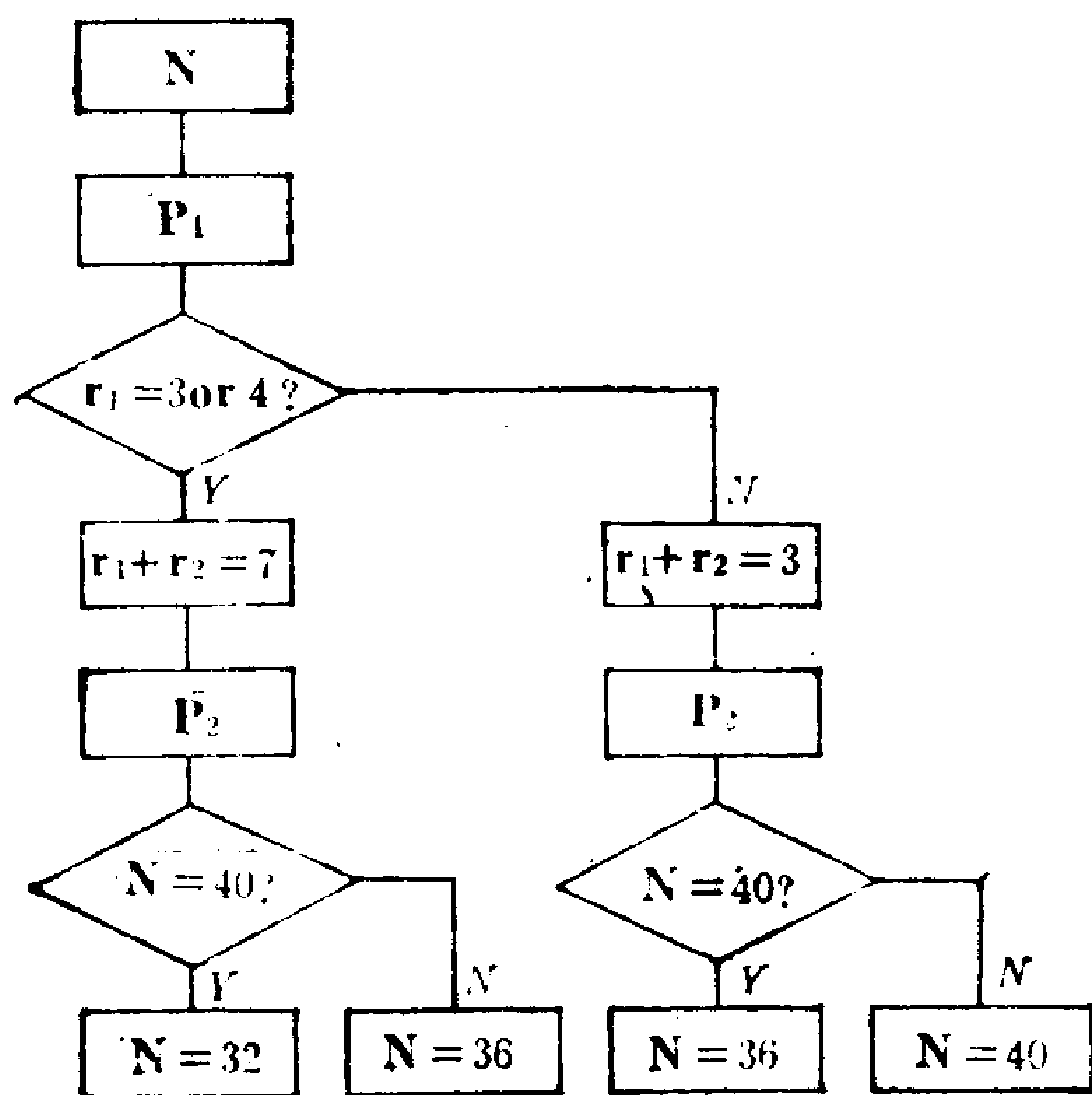


图1.10 二变

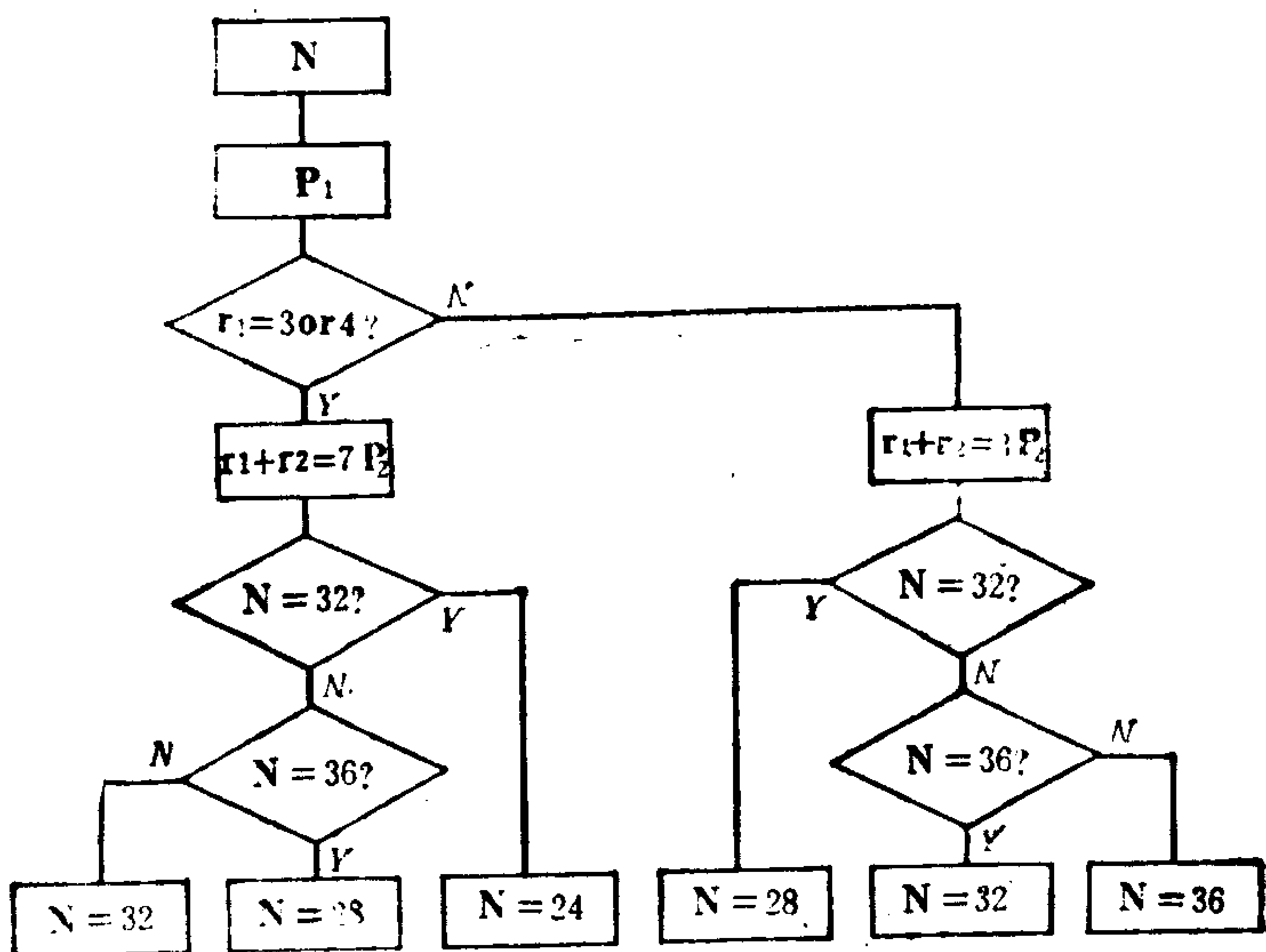


图1.11 三变

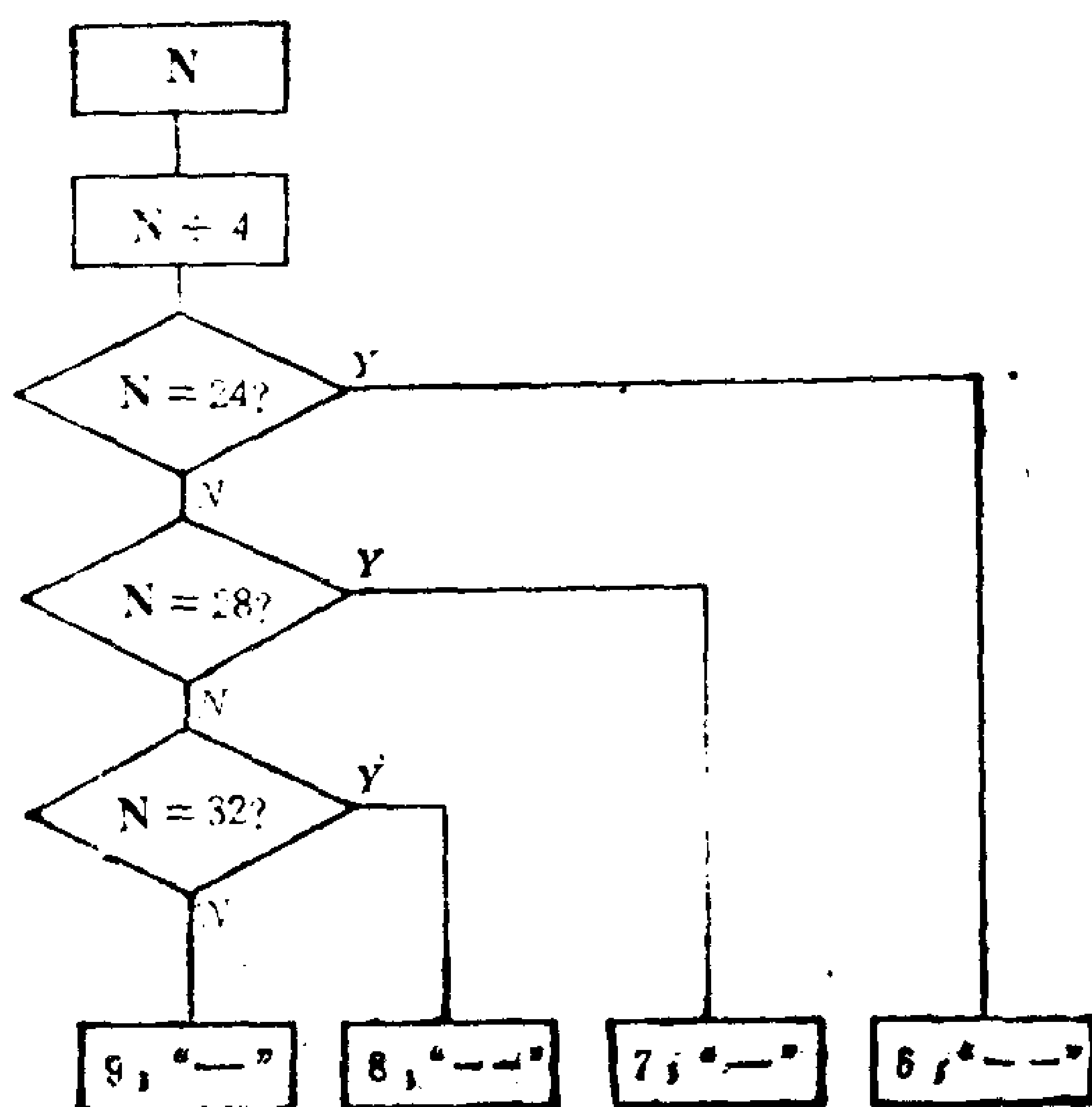


图1.12

表的过程，就可以发现这是一个由简驭繁、逐渐抽象的过程。八经卦各有3爻，如果每爻都用1～9之间的一个数表示，就可得出$9^3=729$个"卦"，别卦有6爻，用9个数字之一表一爻，则有$9^6=531441$个"卦"，用这么多的卦来予卜未来，实际上和什么卦也没有是一样的：不可能分辨数十万个卦所表示的意义，所以古人采取了简化的方法：先去掉易混的二、三、四，进而多用六、七、八、一，最后只用一和六，在意义上则是只区分奇数和偶数。由于只表示奇偶数，用什么"数"作代表已不是本质问题了。进一步再简化为爻"—"和"--"，也就由数抽象为"爻"记号。这样只有两个符号，取3爻则有$2^3=8$个经卦，取6爻则有$2^6=64$个别卦。可以事先确定8卦或64卦的意义，从而用占筮之法预测未来了。

3.数表——古老的信息转换系统

《史记·龟策列传》说："王者决定诸疑，参以卜筮，断以蓍龟，不易之道也。"（历代帝王，为了预测吉凶、解决疑问，经常就重大事件进行卜筮，这是确定不变的一种制度）。占卜是在原始社会中产生的一种原始宗教活动，在中国古代，它就是我们在绪论中所说的"古老的氏族社会的遗风余俗"之一，在中国奴隶社会和封建社会中长期存在，并且"成为一种极为强固的文化结构和心理力量"之一。这就是《周易》能成为《五经》之首，能对中国古代的哲学、思想、科学等产生巨大影响的重要原因之一。

进行占卜的目的是找出联系天人之间的某种信息。占卜的方式远古时亦有多种：龟卜、枚卜、筮卜等等，后来，筮卜逐渐有所发展，成为中国古代社会的一种"法定"的占卜形式。它依靠数字符号来传递信息。《汉书·律历志》说："伏羲画八卦，由数而起"。《左传》说："筮，数也"。杜预注："筮以数占"。孔颖达《周易正义》说："先用蓍以求数，得数以定爻，累爻而成卦"。指的都是筮卜是通过数的计算（通过计算工具——草茎）得到的数表来推定吉凶、预卜未来。在这里，数字和"—"、"--"符号及由它们组成的数表就成为一种信息转换的载体了。

古人认为："易道广大，无所不包，旁及天文、地理、乐律、兵法、韵学、算术、以逮方外之炉火（指方士、道士炼丹），皆可援易以为说（依易而形成理论），而好异者又援以入易（把上述引入易的学说中），故易说至繁"（《四库全书·总目提要》）。实际上正是这样，人们一方面利用《易》来占卜，解决日常生活以至军国大事的疑难；另一方面又把卦象及卦辞爻辞看作是体现了某种规律的东西，从而直接把它们作为分析事物的指导原理，这时人们利用《易》理来说理，认识世界，

《周易》就具有了某种哲学的意味。这后一方面的用法逐渐增加，在《易传》里，对这种用法发挥较多，人们开始把《易经》中的某些爻辞看作具有独立意义的可以引为公理、格言之类的东西，并不断赋予它们新的理论内容，这样《周易》逐渐由卜筮书被改造成为哲学书①。并且被认为是探讨天人之道即世界根本原理的学问，是探讨事物变易的法则和人生修养原则的学问②。因此，《周易》对人生、对人的各种活动都有指导意义。

利用各种卦象来进行信息转换，实际上是用卦象来表示各种事物及其联系，对各种事物及与其联系的信息作了规范化、抽象化和系统化。即古人把这个信息转换体系当作认识世界、解释世界的工具。如前述，这种卦象是一种数表，它们是通过数的演算得出来的，因而《周易》对数学更有特殊的意义，《周易》的哲学对中国古代数学思想方法有较大的影响。主要是这样几个方面：

（1）使中国古代数学有强烈的实用倾向。《周易》把数与万物联系起来了，这是中国古代典型的数学观念。在《周易》中利用数表转换了社会生活各个方面——行旅、战争、享祀、饮食、渔猎、牧畜、农业、婚媾、居处及家庭生活、妇女孕育、疾病、赏罚讼狱等——的信息，因而可以把数学应用于所有这些方面。

（2）由于形成数表，找出信息转换的方法是用蓍草演算，使得人们认为对数的处理就是运用某种工具进行计算，在各个领域里应用数学都离不开计算，重计算的结果必然产

① 肖萐父：《“周易”与早期阴阳家》，载《周易纵横录》，湖北人民出版社，1986 第241页。

② 朱伯崑：《易学哲学史》（上），北京大学出版社，1936年，第18页。

生算法化的思想。

（3）在利用《周易》的数表进行信息转换时，是把万物作为一个有机的整体联系在一起的，它们还具有相互作用。这使得中国古代较早地产生了朴素的辩证思想，它们自然由数表转换到数学中去，使数学中有丰富的辩证思想，这在古代数学中是十分独特的，由此在数学中较早产生了运筹思想、极限思想及正负数计算等等。在世界数学思想的发展中占有重要地位。

（4）使中国古代数学思想中长期有着某些神秘主义观念。《周易》原是卜筮之书，用数占卜，本身就使数有了某种神秘意义，特别在某些历算中应用时，某些数学家赋予数种种神秘的意义。这一点则影响了数学的发展。

（5）《周易》的数表——卦画后来和阴阳五行相结合，构成了一个有方位配制的八卦（或64卦）方位图。这种表中位置是有一定意义的。有限个符号（数表）在不同的位置上相配置、组合就生出无穷多的意义来（生成万物或表示万物的联系）。这种思想对中国古代数学思想方法产生了巨大的影响：中国古代数学的算筹运算中，位置有重要的意义，例如解线性方程组时不同的位置表示不同的未知数，在高次方程理论中位置表示未知数的次数。在多元高次方程组中位置有不同未知数、未知数的不同次数等意义。这种"位置制"的简单性使中国古代数学在上述几方面非常发展，处于领先地位。还产生了专门研究组合数字方法的"纵横图"等，表现了初步的组合数学思想。实质上，促使中国古代数学成为离散数学。

1.4 早期文献中反映的数学思想

所谓早期文献，指的是在现在已知的中国最早的系统的数学著述《九章算术》成书之前（约公元前后）的一些文献，这些文献不是专门的数学著作，因而未能提供系统的数学知识，但许多文献涉及到广泛的社会生活，从而间接地反映了当时数学思想的某些特点。尤其春秋战国是学术上诸子百家争鸣的时代，各种学说互争长短，促进了学术思想的大发展，他们或多或少都涉及数学思想，对数学有所利用，有所创新，作出了不同程度的贡献。

1. 《墨经》的数学思想

墨子（约公元前475年—前395年），名翟，战国时鲁国人，有《墨子》53篇，是墨子或后期墨家所著。其中《墨经》包含了某些数学思想，主要是若干形式逻辑原则和在这些原则基础上的一些数学概念"定义"的思想。

同一律思想。《经说下》（《墨经》的一篇，下面几篇皆如此）说："彼，正名者彼此彼此，可。彼彼止于彼，此此止于此，彼此不可。彼且此也，彼此亦可。"这就是说"彼"之名必须专指彼之实，"此"之名专指此之实，"彼此"之名必须指彼此之实。这是合逻辑的；如果，"彼"之名不同于"此"之实，"此"之名也不同于"彼"之实，那么，以"彼"名"此"就不合逻辑，因而"不可"；如果"彼"、"此"名实相合，那么以"彼"名为"此"名是可以的。这里包含了某种同一律的思想。

矛盾律思想。墨家重视辩论，在辩论中强调矛盾律思想。《经上》说："辨，争彼也，辨胜当也。"《经说上》说："辨，或谓之牛，或谓之非牛，争彼也。"这是说"辨"就是争论同一

事物（“彼”）或同一命题（“彼”）的是非真假问题。一个事件不能同时为是又为非，一个命题不能同时为真又为假。“彼”既是牛又不是牛，是不可能的。这里包含了矛盾律的思想。

排中律思想。《墨子·小取》篇说：“夫辨者，将以明是非之分，审治乱之纪，明同异之处，察明实之理，处利害，决嫌疑”。墨家以辨者自居，对于是非、治乱、异同、名实、利害、功罪，都要泾渭分明。非此即彼，二者必居其一。这里包含了排中律的思想。

在这几个基本逻辑规律的基础上，墨家对一些数学概念给出了比较明确的定义，下面列表（表1.3）举出《墨经》中的一些数学定义。

墨家讲究“正名”，重视概念。关于数学和与数学有关的概念的定义，还有一些，如“仳”、“半”、“得”、“攖”、“次”、“久”、“纑”、“盈”、“始”、“尺”、“区”、“间”等等。可见，墨家的数学基本概念定义和逻辑思想在先秦曾一度大放异彩。可是，由于墨家在秦汉以后衰微，传下来的《墨经》又多断简残篇、译读困难。所以在西汉后“废黜百家，独尊儒术”的历史条件下，墨家的形式逻辑和概念定义的思想没有与中国古代数学真正结合起来，它自己也渐次湮没，直到清代，才又有人重新研究。

2. 《礼记》、《周礼》中的数学思想

远在西周时期，数学就是基本教育内容的“六艺”——礼、乐、射、御、书、数——之一。《礼记》说：“六年（即六岁时）教之数与方名，…九年教之数日，十年出就外傅（老师），居宿于外，学书计”。就是说，在初等教育中就包括了数学教育：六岁开始学习计数和辨认方向，九岁时学习天干地支记日法，十岁学习写字、文法和数学知识，提高计算能力。

表1.3

概念	原　文	解　释
点	端，体之无序而最前者也	端点是物体最前的一点，不可能有更前面的点
	端是无同也	不可能有两点处在完全相同的位置上
平行	平，同高也	距离相等的，两条直线的关系叫平行
直线	直，参也	直线上有三个点
相等	同，长以正相尽也	两个东西完全重合为相等
中心	中，同长也；心、中，自是往相若也	与端点距离相等的点为中心
圆	圜，一中同长也	圆是与中心等距的点的轨迹
	圜，规，写支也	圆是用"规"画出的图形
正方形	方，柱隅四讙也	正方形有四个边和四个角，而且四边相等四角相等
	方，矩，见支也	正方形是用"矩"来检验的
有界	穷，或有前，不容尺也	有边界线的区域叫有界：与边界线的间隔已经不可能容纳一线，就是有界，
	穷，或不容尺，有穷	
无界	莫不容尺，无穷也	没有边界的区域叫无界
体积	厚，有所大也	体积是物在空间三度上的大小
部分	体，分于兼也	部分是从整体划分出来的

与"六艺"的要求是一致的。

据《周礼》，"六艺"中的"数"指的是"九数"，汉代郑玄认为九数是"方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要，今有重差、勾股"。其中显然窜有汉代的内容。但由此可知，"数"的教学内容，包括了"那个时代民生日

用的主要计算问题"①。这对后世数学思想有较大的影响，《九章算术》似由此发展而成。

"六艺"的艺，指的是技艺，是一种普遍适用的技艺。这种教育思想在中国古代影响深远。作为技艺学习的目的当然是为了应用，这就产生了中国古代数学中的经世致用的实用思想。在当时，数学也确实起到了"经世致用"的效果。例如，当时已十分重视、并视为与王权有关的天文历法离不开数学，周朝已设立专门的职官来掌管，后世也从未间断过；还设立了管理国家财政收支的官员"司会"，掌管军需计算的职官"法算"等等。因为数学能"经世致用"，所以也越来越受到统治者的重视，数学教育代有加强，在隋唐之际达到了高峰。"能书会计"成为评价官员才能的一项指标。

由此可见，中国古代数学教育是以培养社会生产、社会生活各领域内需要的数学人才为目标的，因而发展了"经世致用"的数学实用思想。

3. 《庄子》中的数学思想

庄子，名周，战国时人(约公元前369年—前286年)，中国古代哲学家。《庄子》一书33篇，是庄子及其后学的著作。

《庄子·天下篇》中有这样一句著名的话："一尺之棰，日取其半，万世不竭"。意思就是，有一个一尺长的木棒，第一天截取它的一半，以后每一天截取其前一天剩余的木棒的一半，这样截取法，取1万年也截取不完（即截取的总数总也不够一尺长）。

用现代数学语言，只考察所取的"棰"的长度，这句话可表示如下：

第1天取 $S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$

① 毛礼锐：《中国教育史简编》，教育科学出版社，1984年，第25-26页。

2天共取走 $S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$

3天共取走 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$

…………

n天共取走 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

文中说的“万世”可理解为相当大的有限数，因此，所取的长度和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1$$

另一方面，“万世”又是人无法达到的“无限大”的数，所以，这句话又含有这样的意义：

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

就是说，这里包含了朴素的极限思想。

如果也考察“棰”本身，那么这句话就表示了一个有限和无限的辩证转化过程。

“一尺之棰，日取其半”，就是一个有限向无限的转化过程。就棰的长度来说，分的过程是无限的，无论分得多么小，

总是可以取长度之半的，这是一个无限的过程。但是"纯粹的量的分割是有一个极限的，到了这个极限它就转化为质的差别"，①对作为一定质的棰来说，具体的分割又是"可竭"的，即分到一定的关节点时，就不能保持"棰"之所以为棰的质了。这个关节点就是"取"的一个极限，它标志着分的过程从无限到有限的转化。这个关节点大约在分到第30天时达到，这时棰的长度大约是10亿分之一尺，已小于分子直径的数量级，这时就再不成其为棰了。可见，"取"的过程是一个有限和无限的对立统一过程。

《庄子》中的这种辩证思想后来在中国古代数学中得到发扬，成为中国古代数学思想的重要特点之一。

4. 《考工记》的数学实用思想

《考工记》据传是战国时期齐国人的著作，后来收入儒家经典之一的《周礼》，成为中国古代社会的重要经典的一部分。书中记述了当时手工业生产的设计规范、制造工艺等生产技术问题，内容涉及木工、金工、皮工等六类工种，分别对车辆、宫室、兵器等30种手工制品的设计制造进行了探讨，是一部重要的技术著作。在一定程度上代表了战国时期技术发展的水平。《考工记》在阐述手工制品的设计和制造工艺时，应用了大量数学思想方法。略述如下：

（1）在制造车轮的工艺过程中应用了有关圆的知识。车辆是古代运输和作战的重要工具。春秋战国时把一国能出多少辆战车作为衡量国力强弱的主要标志。车轮是圆的，所以在《考工记》中规定，在制造车轮时要"规之以眡其圜"，就是用圆规来检查车轮圆不圆。

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社，1971年，第18页。

（2）车轮既要圆，还必须使它保持在同一平面内。《考工记》说："萬之以眡其匡也"，就是要使车轮保持在同一个平面内，矫正可能有的歪斜。

（3）车轮的辐条还必须笔直，应与圆的半径重合。《考工记》说，"县之以眡辐之直也"，即用悬物线即垂直线来考察车轮辐条是否笔直，是否过圆心（轴）。

（4）在制造农具、车轮、兵器、乐器等的过程中，产生了角度的概念。《考工记》把直角叫做"倨句中矩"，或简称"一矩"。45°角叫"宣"，67°30′的角叫做"欘"，101°15′的角叫"柯"等等。

（5）弯刀和雕弓是古代的重要兵器，要有一定的规格。《考工记》把这种规格归结为关于圆周和角度的知识——指出弯刀应是圆周的1/6的弧形，还指出几种雕弓的弧应是圆周的多少分之一。可见，中国古代的数学为技术服务，技术发展的需要又推动了数学的发展，数学与实践密切结合的思想早就形成了。

（6）在大一统的中国古代社会中，度量衡是必须统一标准的。春秋时秦孝公就曾采纳商鞅的意见"平斗桶、权衡、丈尺"（《史记·商君列传》），建立了统一的度量衡制度。至今仍然保存着当时的标准量器——"商鞅量"。《考工记》中说，"量之以为鬴，深尺、内方尺而圜其外，其实一鬴。其臀一寸，其实一豆；其耳三寸，其实一升；重一钧"。这个鬴也是一种标准量器。《考工记》中给出了它的规格和制造工艺。这也是与社会需要息息相通的。

由以上分析不难看出，《考工记》充分反映了当时人们的一种数学实用思想：利用数学来解决当时社会生产、生活所提出来的各种实际问题。它把数学应用于手工业生产中，实

际上是应用于社会生产、生活的各个领域。同时，关于手工业生产的著述列入了“经典”之中，说明中国封建社会的国家具有对手工业进行管理以至于经营的职能，而要实现这种职能，必要的数学知识是不可缺少的。因此，在中国古代，数学成为“六艺”之一，人们把数学看作一种实用的技艺，应用到社会生产和生活的各个领域中去。后来，数学实用思想不断发展，成为中国古代数学思想的重要特点之一。

5. 《周髀算经》的数学思想

《周髀算经》是一部天文学著作，其成书年代约为公元前1世纪。书中系统地把数学应用于天文学，是中国古代著名的“数理天文学”的早期著述之一。书中提供了数学发展的早期的情况。

《周髀算经》说：“昔者周公问于商高曰：… 请问数安从出？商高曰：数之法，出于圆方；圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。故折矩以为勾广三，股修四，径隅五。……故禹之所以治天下者，此数之所生也”。

这段话表述了这样一些思想：（1）指出数学是由社会实践活动（禹治天下）中产生的；（2）数是在测量中产生的，数和形有密切的关系，对形的测量就表示为数，因而对形的研究是通过对数的计算实现的，由此发展出了中国古代数学以计算、尤其是以算法为主要内容的特点；（3）商高（公元前11世纪）就已知勾股定理的一个特例：$3^2+4^2=5^2$；《周髀算经》又指出，陈子（据推证为公元前六七世纪人①）已得出“勾股各自乘，并而开方除之”就是弦，这已得出勾股定理，但定理的表述则是一个算法。这种与实践密切结合的思想、重计

① 梁宗巨：《世界数学史简编》，辽宁人民出版社，1980年，第331页。

算、内容算法化的思想后来都得到长足的发展。

《周髀算经》对于测量(一般测量或天文测量)术有重要的贡献，其测量工具用“矩”（直角尺，可以说是一个直角三角形)，其测量方法就是采用勾股定理进行计算的方法。它说：(“用矩之道”)“平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方。”意思就是，用准绳(绳下束一重物）可测得铅垂线，使矩的一个边与铅垂线密合，另一个边则是水平方向，以此可以确定水平。仰看矩可以测出高，如图1.13所示，求EF之法。把矩翻过来，如图1.14所示，就可以测出低于水平面的深度，若将矩放平，如

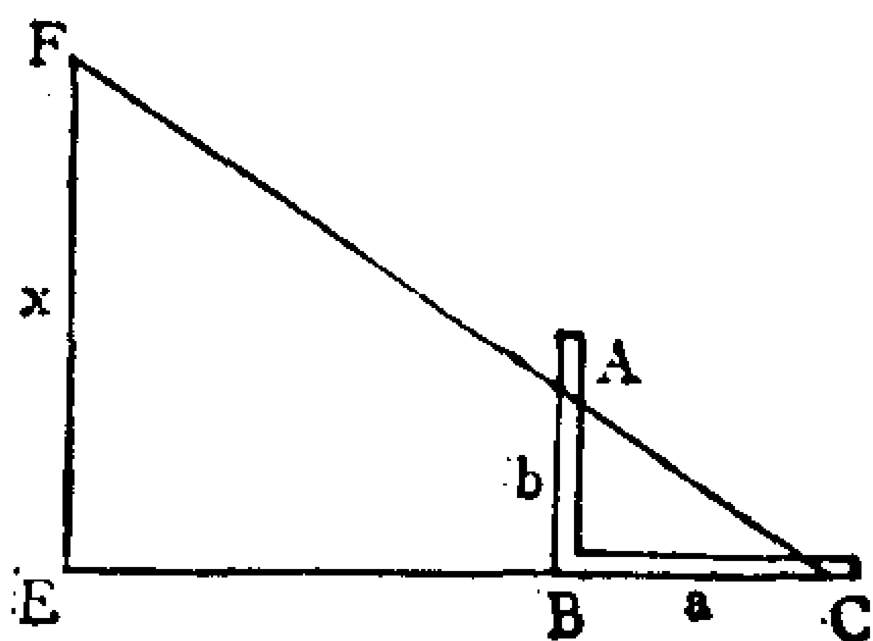


图1.13

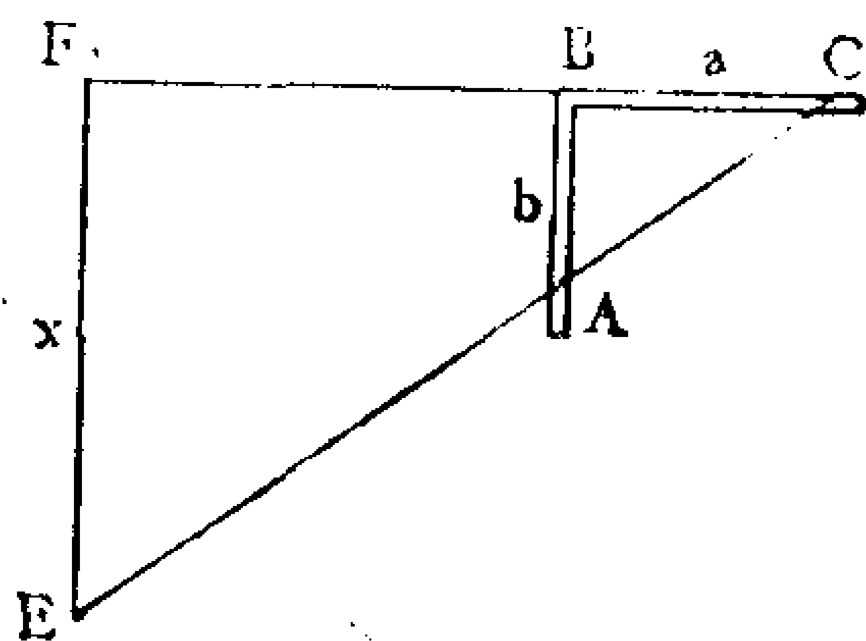


图1.14

上两图所示的图形就在水平面上，EF就是两点的距离，可用矩法求之。固定矩的斜边(弦)，直角顶点的轨迹就是一个圆，两个矩合起来就得到一个矩形。

如果图中的EF是人们无法达到的，能否测量呢？《周髀算经》给出了其测量法，即“测日高”。具体是用矩(这里表示为“髀”——八尺长的木杆和它的影子）测两次，再用勾股定理计算。其方法如图1.15所示。其中S是太阳，SI为日高，$AC = DF = h$“髀”长(8尺)，BC、EF为阳光下(某日正午同时)“髀”的影长，$EF = CG = b$，$BC = BG + CG = a + b$，$AD = CF = d$ (2000里)，如图不难得出

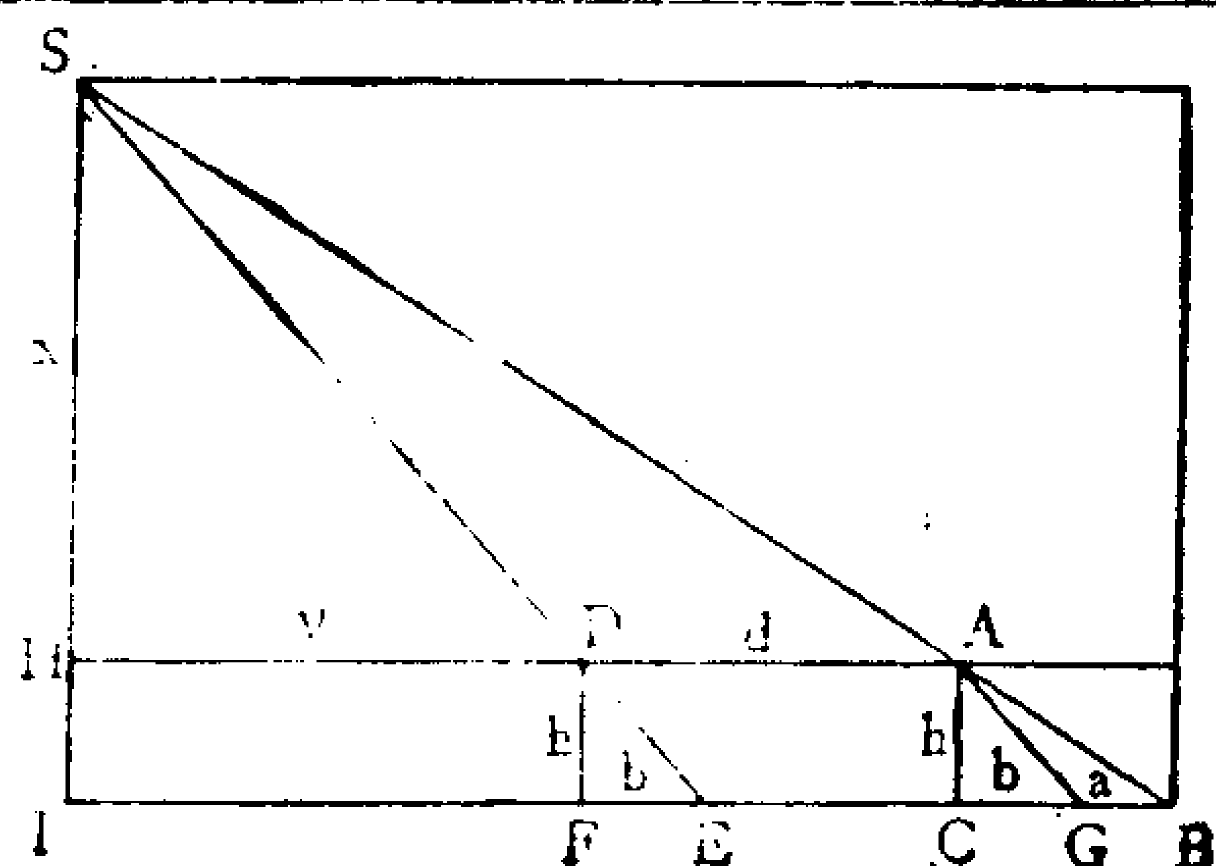


图1.15

$$x : h = d : a, \quad y : b = d : a$$

有

$$x = \frac{dh}{a}, \quad y = \frac{db}{a}$$

a、b、d、h 都可测知，x、y 不难得出，日高即可知。还可以进一步用勾股定理求出"髀"距日的距离（SD 或 SA）。

《周髀》的测量术中一再应用勾股定理，后来勾股定理逐渐发展成为中国古代数学中的一个典型的数学模型。数学中广泛采用模型法的思想也发展起来。在天文、测量中广泛应用数学，也是数学实用思想的一个重要开端之一。

二 《九章算术》的思想方法

中国古代的数学思想方法，源远流长，从几十万年前的原始社会开始，经过漫长的历史年代，形成了数和形的概念，创造了世界上最早的十进位值制记数法，经过商周，特别是春秋战国时代的发展，不断有所创新，逐渐形成了独具特色的中国古代数学思想方法的雏型。正如《周易》和其他先秦文献所反映的，中国古代数学在与天文、技术、哲学、教育以及社会生活的诸多方面的结合中，突出了数学的实用思想、辩证思想，相对地忽略了系统的逻辑思想；重视实用问题的计算，缺乏理论的建构。同时，古老的数学神秘思想，也象幽灵一样，若隐若现地对数学的发展起着干扰作用。

《九章算术》可以看作中国古代数学思想方法的集中表现。它承前启后，奠定了中国古代数学思想方法的基础。它又是中国古代数学文献的典范，它的思想方法，在1000多年间支配着中国的数学领域，也是现代数学思想方法的重要源泉之一。

2.1 古代数学的经典著作——《九章算术》

《九章算术》是中国古代的一本传世数学名著。它不是一个人的作品，也不是在一个时代里完成的，它是经过历代名家的修订和增补，才逐渐成为定本的。正因为如此，其中也

就几乎集中了过去和当时的全部数学知识。

《九章算术》的确切起始年代还无法确定，只知在汉代经过张苍（约公元前200年）和耿寿昌（约公元前50年）的整理。人们倾向于认为那时已大体上成为定本。1984年湖北张家山汉墓出土的西汉竹简《算数书》（公元前2世纪初）与《九章算术》有很多相似的地方，可为佐证。现在传世的《九章算术》是经三国时人刘徽（公元263年）注的注解本。

《九章算术》虽然成书于汉代，但它的内容包括了汉以前的重要数学成果，它的思想方法是中国古代数学思想方法的总结和新发展的起点，对中国古代数学思想方法的发展具有划时代的意义。

《九章算术》是以应用问题集的形式表述出来的，一共收入246个问题。先举出问题，然后给出答案，考察一类问题后再给出“术”，术是怎样解这类问题的一种算法。全书共有202个“术”。在编排上，把246个问题分为九章，这是书名的来历。每章有若干个问题。九章的名目和主要内容如表2.1所示。

《九章算术》的思想方法的主要特点如下：

（1）开放的、归纳性的表述体系。

（2）算法化的内容。

（3）模型化的方法。

（4）利用算筹作计算工具。

不难看出，《九章算术》思想方法的特点，正是继承和发展了中国古老的数学思想，反映了中国古代社会的生产方式、思维方式和生活方式的某些特点。它奠定了中国古代数学思想方法的基础，指引了中国古代数学发展的方向，为创造光辉的数学成果开辟了广阔的前途，为培养数学人才提供

表2.1

章次	章名	题数	"术"数	主要内容	重要的术
1	方田	38	21	平面形田地面积的计算问题与计算面积有关的分数四则运算。	均分术，割圆术
2	粟米	46	33	计算各种粮食兑换问题；砖、竹、漆、丝、布等生产、生活资料的买卖问题；比例问题。	今有术 经率术
3	衰分	20	22	按一定比例进行分配的问题：按等级制分配物品、税收、罚款、计工、贷款利息，粮食买卖等。	衰分术 返衰术
4	少广	24	16	已知矩形田面积及一边求另一边；关于正方形、圆形、立方体、球体等求积问题。(开启了中国古代解一元高次方程的先河)	开方术、开圆术，开立方术，开立圆术
5	商功	28	24	土方工程的计算。关于筑城、开渠、开运河、修堤坝、建粮仓等的应用问题。给出多种立体体积的求积算法。开创了中国古代数学中的独特的数学证明方法。	委粟术 阳马术 刍童术
6	均输	28	28	关于"均输平准"政策——当时按各地区人口多少、路途远近、生产的粮食种类、交纳实物或摊派徭役的计算方法。	均输术
7	盈不足	20	17	引出和运用"盈不足术"的应用问题，是一种常用数学模型。	盈不足术

章次	章名	题数	"术"数	主 要 内 容	重要的术
8	方程	18	19	列线性方程组解的有关应用问题。利用算筹摆法来解线性方程组，实际上相当于现在利用线性方程组系数增广矩阵变换的方法	方程术，正负术
9	勾股	24	22	利用勾股定理来求解的应用问题，开创直角三角形相似法进行测量计算，解决了关于高度、深度和广度的各种测量计算问题。	勾股术

了丰富的营养。《九章算术》的思想方法是中国古人给中国和世界数学提供的一份宝贵的财富。

2.2 开放的归纳体系

《九章算术》以及后来的大部分中国古代数学著作都采用了一种开放的归纳体系。

所谓开放，指的是数学体系作为一个系统来说，不是自足的、封闭的，而是与外界经常进行信息交换的。如前节所介绍的，《九章算术》与当时的社会生产、生活等无不有着密切的、直接的联系，它的问题几乎都来自社会生产、生活的实践。数学著述的目的就是为了解决这些实际问题。所谓归纳体系，指的是数学的表述体系是由个别到一般的推导方式组成的。下面分别来探讨它们。

1. 数学理论与社会实际相结合的体系

由前面作的介绍可知，《九章算术》中给出的 246 个问题

多是社会生产和生活中的实际问题，它们几乎包括了一个以农耕为主的封建社会的社会生产和生活的各个领域的问题。图2.1中给出了《九章算术》中各章问题与社会生产、流通、交换、分配、消费等各经济领域的关系。我们作些进一步的分析。

——表有关

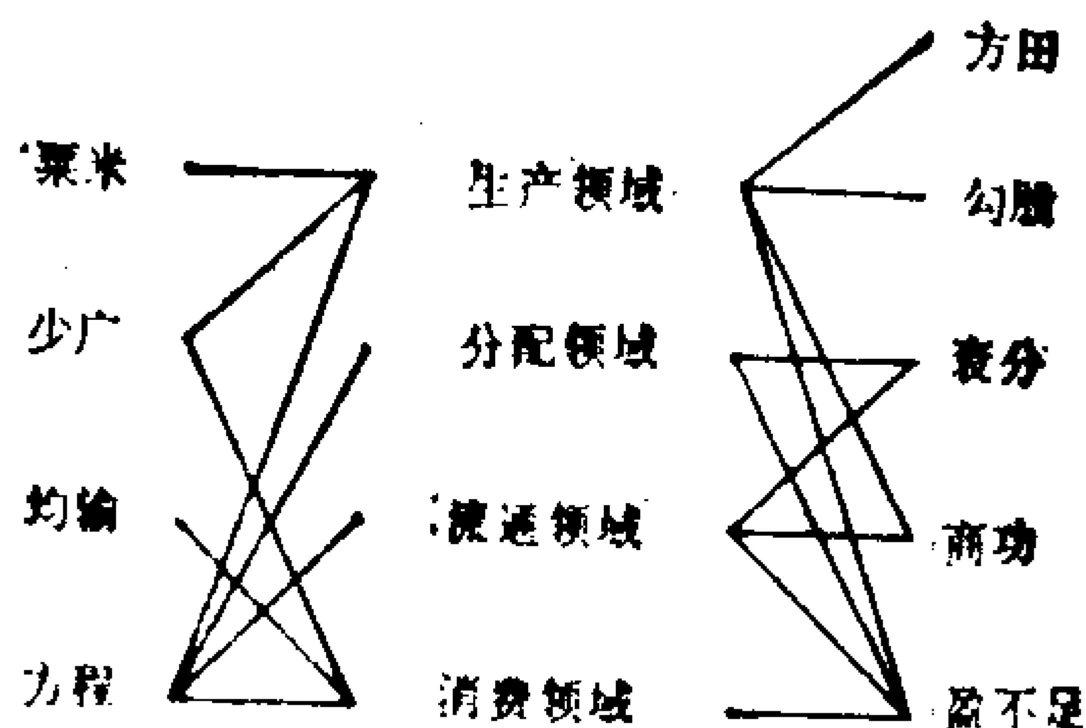


图2.1

《九章算术》第一章“方田”的前两题为：

“1.今有田广十五步，从十六步。问为田几何。答曰：一亩。

2.今有田广十二步，从十四步。问为田几何。答曰：一百六十八步。”

题后有术：“方田术曰：广从步数相乘为积步。”其中“广”即宽，“从”即长，是求矩形田地的面积。求田地面积是直接从农业生产中来的问题。这一章还有关于“圭田”（三角形田），“邪田”、“箕田”（梯形田地），“圆田”，“弧田”（弓形田），“环田”（圆环形田地）等的面积计算问题。

土地问题，历来就是中国古代社会中的关键性问题。土地一直是人们的主要生产资料，西周分封诸侯，即分封土地；春秋战国以来，土地逐渐私有，但“王侯”仍然有着本国土地

的实际所有权，地主要向国家交税纳租。秦汉统一天下，建立了一个封建的大一统的帝国，“天子”成为天下土地的主人，所有的政策、生产等都与土地有直接的关系，土地面积的测量计算确是中国古代国计民生的一件大事。“方田”章反映了这一点，是直接为社会生产、生活服务的。

《九章算术》第二章“粟米”，开头是：

“粟米之法

粟率五十	粝米三十
粺米二十七	糳米二十四
御米二十一	小䵂十三半

……

“今有术曰：以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如法而一”。

这实际上是给出了一个各种粮食兑换的比率表。所谓粟米，指的是谷子。谷子五斗，去皮得粝米（糙米）三斗，再舂为粺米（九折米）二斗七升，糳米（八折米）二斗四升、御米（七折米）二斗一升，磨为细麸面一斗三升半，等等。所以有

粟米:粝米 = 50:30，

粟米:粺米 = 50:27，

……

因为表中都以粟米为标准，所以称为“粟米之法”。

“今有术”是一种比例算法，即按表中给出的比率进行计算，具体算法是

$$所求数 = (所有数 \times 所求率) \div 所有率$$

“实”为被除数，“法”为除数，“实如法而一”指用实除以法就

得到一个结果，以下同此。

“粟米”章接着举了31道粮食交换问题，都用“今有术”求解。例如：

“今有粟一斗，欲为粝米。问得几何。答曰：为粝米六升”。（第一题）

这里粝米是所求数，一斗是所有数。所有率：所求率=50:30(见前表)。故有

粝米数=(1×30)÷50=0.6(斗)。

农业是中国古代社会最重要的生产部门，以物易物的农产品交易是中国古代农业生产发展的不可缺少的环节，以上所述按比例兑换粮食就来源于这种实践。这一章中还涉及到关于丝、羽、竹、漆、布等生产或生活资料的贸易计算问题。它们都直接来源于社会生产或生活。

更能说明《九章算术》体系对于社会生活的开放性的是第六章“均输”。其第一题为：

“今有均输粟，甲县一万户，行道八日；乙县九千五百户，行道十日；丙县一万二千三百五十户，行道十三日；丁县一万二千二百户，行道二十日，各到输所。凡四县赋，当输二十五万斛，用车一万乘。欲以道里远近，户数多少，衰(按比例)出之。问粟、车各几何。

“答曰：甲县粟八万三千一百斛，车三千三百二十四乘。乙县粟六万三千一百七十五斛，车二千五百二十七乘。丙县粟六万三千一百七十五斛，车二千五百二十七乘。丁县粟四万五百五十斛，车一千六百二十二乘。

“均输术曰：令县户数，各如其本行道日数而一，以为衰。甲衰一百二十五，乙、丙衰各九十五，丁衰六十一，副并为

法。以赋粟车数乘未并者，各自为实。实如法得一车。有分者，上下辈之。以二十五斛乘车数，即粟数。”

这个“术”的意思是：各县按其行道日数，按排与行道日数相同的户数共出一车，如甲县要行道八日，则使八户共出一车，乙县要行十日，则使十户共出一车，这样就等于在路上每一户一日出一车，就达到了“平准、均输”的目的了。再以各县户数、算出四县的出车比例（“衰”），用共出一车的户数除总户数即得。四县出车比例为125∶95∶95∶61。把这些比例数加起来作除数，用总车数和某县的比例的乘积为被除数，就得出该县应出车数。如果得出的车数有分数，则四舍五入为整数。再以25斛乘车数，就得各县当出粟数。按此：

$$\text{甲县车数}=\frac{10000\times125}{125+95+95+61}=\frac{1250000}{376}=3324\frac{22}{47},$$

$$\text{乙县车数}=\frac{10000\times95}{376}=2526\frac{28}{47},$$

丙县车数同乙县，

$$\text{丁县车数}=\frac{10000\times61}{376}=1622\frac{16}{47}。$$

四舍五入，四县各出车数为：3324，2527，2527，1622。与“答”的数同。这里的“有分者，上下辈之”（有分数，则四舍五入为整数）是近似计算的一项重要成就，也是问题来源于实践，和社会实际密切相关的一个重要证据：因为实际中，车只能是整数。

所谓“均输”指的是汉武帝元封元年（公元前110年）开始

实行的有关交纳租税和摊派徭役的“均输平准”政策，内容是按各地的人口多少、路途远近、谷物和其他实物的种类而合理负担租税和徭役。当然，这类问题并非汉朝才产生，实际上很早就产生了如何摊派租税和徭役的问题。春秋战国，各国交战不停，动则出动数万人马，征战不息；秦始皇动员数十万人筑长城和宫殿陵墓，长达几十年。这种沉重的负担如何分给各地各户，这是一个老问题，也是一个关系国计民生的大问题。显然是古代“运筹帷幄”进行国家管理的主要内容之一。汉武帝时把均负担的方法法律化、制度化，产生了均输平准政策，实施这一政策的重要工具之一就是数学。《九章算术》为此设章，为均输平准政策提供算法，说明了数学与社会实际密切结合，随时与社会进行信息交换的数学思想，说明了《九章算术》体系的开放性。

其他各章也是这样。纵观《九章算术》，其问题多数直接来自社会生产和生活的实践，其得到的结果又直接应用于解决生产和生活实际中的问题。所以我们说，《九章算术》的表述体系是一个开放体系。

2. 由个别到一般的归纳体系

《九章算术》的表述体系是一个由个别到一般的推导方式建立起来的。多是先举出某一社会生活领域中的一个或几个个别问题，由此归纳出某一类问题的一般解法——算法(术)，再把各类算法综合起来，得到解决该领域中的各种问题的方法，就构成一章；再把解决社会生产、生活各领域中的问题的数学方法综合起来，归纳而成整个《九章算术》。归纳也包含另一层含意，即按解决问题所需要的数学方法进行归纳，许多不同领域的问题可能应用了相同的计算方法，从这些方法中找出普遍的东西——提炼出数学模型。再以模型立章归

入《九章算术》之中。这是以归纳方式建构体系的两种主要方式。下面分别来探讨它们。

前面说明体系的开放性时举的几个实例都是第一种建构体系的方式。如“方田”章的第一题和第二题都是个别性的问题，通过对它们的具体研究，得出求矩形田面积的一般算法——方田术。“均输”章的例子也是这样，由一些个别的问题得出计算均输问题的一般算法——均输术。再举一例。

“商功”章有这样三道题：

“23.今有委粟平地，下周一十二丈，高二丈。问积及为粟几何。答曰：积八千尺，为粟二千九百六十二斛二十七分斛之二十六。

24.今有委菽依垣，下周三丈，高七尺。问积及为菽各几何。答曰：积三百五十尺。为菽一百四十四斛二百四十三分斛之八。

25.今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺。问积及为米各几何。答曰：积三十五尺九分尺之五。为米二十一斛七百二十九分斛之六百九十一。

委粟术曰：下周自乘，以高乘之，三十六而一。其依垣者，十八而一。其依垣内角者，九而一”。

译成现代汉语：

23.有一些谷子，堆积在平地上（成圆锥形），它的底圆周长是12丈，高2丈，问它的体积和谷子数各是多少。

24.有一些豆子，靠墙堆积，它的底圆半周长为3丈，高7尺，问它的体积和豆子数各多少。

25.有米若干，堆积在墙内角，它的底圆周长的1/4是8尺，高5尺，问它的体积及米数各是多少。

其堆积形状分别如图2.2之a、b、c所示。

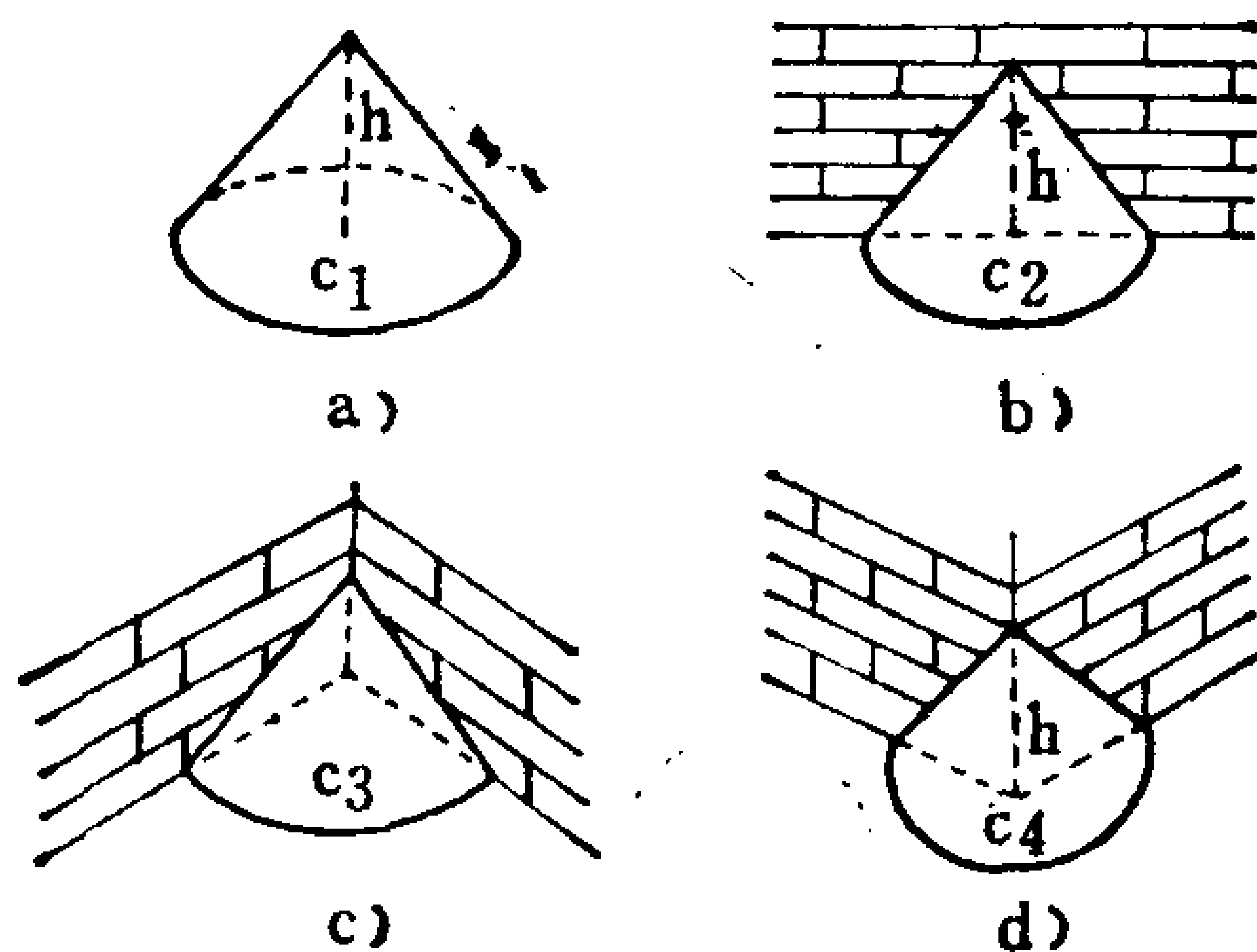


图2.2

下面用计算公式（符号如图2.2）译出“委粟术”并作具体计算（表2.2）。其中，2700是每斛粟的体积（寸^3），2430和1620分别是每斛菽和米的体积。

这也是由个别问题引出一般算法的。这个例子是一个有重要意义并且十分常用的算法，它来自社会生活（农业生产及农产品存贮、贸易等），又用于解决社会生活中的问题。后来，在“委粟术”的基础上形成了计算堆积的歌诀（是一种简明的算法），在我国民间广泛流传：

光堆法用三十六，
倚壁须分十八停，
内角聚时如九一，
外角三九甚分明。

最后一句指的是依垣外角（见图2.2之d）的堆积①。处理问题确实是由个别到一般的。同时也再次说明了《九章算术》体系的开放性。

① 李逢平：《中国古算题选解》，科学普及出版社，1935年，第28-29页。

表2.2

原文	公式	具体计算
下周自乘，以高乘之，三十六而一。	$V=\frac{1}{36}c_1^2h$	$V=\frac{1}{36}\times120\times120\times20$ $=8000$(尺³)
(圆锥)	(c_1:圆周，h:高)	$8000000\div270=2962\frac{26}{27}$(斛)
其依垣者，十八而一。	$V=\frac{1}{18}c_2^2h$	$V=\frac{1}{18}\times30\times30\times7=350$(尺³)
(圆锥的一半)	(c_2: 圆周之半)	$250000\div2430=144\frac{8}{243}$(斛)
其依垣内角者，九而一。	$V=\frac{1}{9}c_3^2h$	$V=\frac{1}{9}\times8\times8\times5=35\frac{5}{9}$(尺³)
(圆锥的四分之一)。	(c_3:1/4圆周)	$\frac{1}{9}\times320000\div1620=21\frac{691}{729}$(斛)

再看归纳体系的另一种建构方式——以数学模型建章的方式。《九章算术》中"盈不足"、"方程"和"勾股"等章都是以常用数学模型建章的。

"盈不足"章开头先列出四个盈、不足问题，如第一题："今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四。问人数、物价各几何。答曰：七人，物价五十三。"(译文：今有若干人共同买东西。如果每人出8个钱则多出3个钱；如每人出7个钱则少4个钱。问人数有多少，物价是多少。)由解这些个别问题归纳出"盈不足术"："置所出率，盈、不足各居其

下。令维乘所出率，并以为实。并盈、不足为法。实如法而一。有分者，通之。盈不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数。"（译文：列出前后两个假设（如第一题中人出8钱和7钱）的数，把每次假设所得的盈和不足之数列在"率"之下。这四个数就排成一个方形、交叉相乘，得到的两个积加起来，以其和作为被除数；以盈数和不足数之和作为除数；作除法得到的商就是每人应出的钱数（按此钱出则无盈无不足）。再看所出率，用多的减去少的，用其差分别除上面所得的除数（法）和被除数（实），所得的商就分别是人数和物价。）

以第一题为例说明"术"的具体用法，按术是用算筹计算的算法，具体的算筹排布如图2.3所示，为明显计，把筹算数字改记为现代数字，两边的文字为术，即计算方法：

置所出率	8	7	
盈、不足各居其下	3	4	
维乘所出率	32（$=8\times4$）	21（$=7\times3$）	
并以为实	53（$=32+31$）		
并盈、不足为法	7（$=3+4$）		
	$4-3=1$		置所出率，以少减多，余以约法、实
法为人数	$\frac{7}{1}=7$		
实为物价	$\frac{53}{1}=53$		

图2.3

用现代数学方法说明：设人数为x，物价为y，每人出钱a，盈b；出钱a'，不足b'，则有

$$\begin{cases} y = ax - b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

解之有 $x = \dfrac{b + b'}{a - a'}$， $y = \dfrac{ab' + a'b}{a - a'}$.

与图2.3所示结果以至过程是非常一致的。这里，"实如法而一"，得出每人在无盈、无不足情况下应出钱数

$$\frac{y}{x} = \frac{ab' + a'b}{a + b'}.$$

"盈不足"章中共有20题。前8题都是有盈、不足的问题，后12题并不是盈不足问题，但仍然采用了盈不足术来解。例如第10题：

"今有垣高九尺。瓜生其上，蔓日长七寸。瓠生其下，蔓日长一尺。问几何日相逢，瓜瓠各长几何。答曰：五日十七分日之五。瓜长三尺七寸十七分寸之一，瓠长五尺二寸十七分寸之十六。"(译文：有一墙高9尺。墙顶生一颗瓜，瓜蔓每日向下长7寸。墙下生一颗瓠（hù，瓠子，一种一年生蔓茎草本植物，其果实也叫瓠，可做菜），瓠蔓每日向上长1尺。问几日后瓜瓠蔓相遇。）

这本是一个一次方程问题。设x日瓜、瓠相逢，则此时瓜蔓长$0.7x$尺，瓠蔓长x尺，按题意，有

$$x + 0.7x = 9$$

得 $x=5\frac{5}{17}$(日)。但《九章算术》中仍采用了盈不足术来解。

先作两次假设，每次假设就是一个近似解，按假设依题意求出盈和不足之数，再用盈不足术求解：

5日之后，瓜蔓长3.5尺，瓠蔓长5尺，不足0.5尺；6日后，又比9尺多了1.2尺(盈)。以 $a'=5$，$b'=0.5$；$a=6$，$b=1.2$。。代入盈不足术的"每人应出钱数"公式，得

$$相逢日数=\frac{ab'+a'b}{b+b'}=\frac{6\times0.5+5\times1.2}{1.2+0.5}$$

$$=5\frac{5}{17}(日)。$$

这个公式还可以用现代术语如下推导：

求方程 $f(x)=0$ 的根，相当于求曲线 $y=f(x)$ 与 OX 轴交点的横坐标(图2.4)。先估计两个近似答案 x_1，x_2。对应的函数值是 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$。过 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 作直线，其方程是

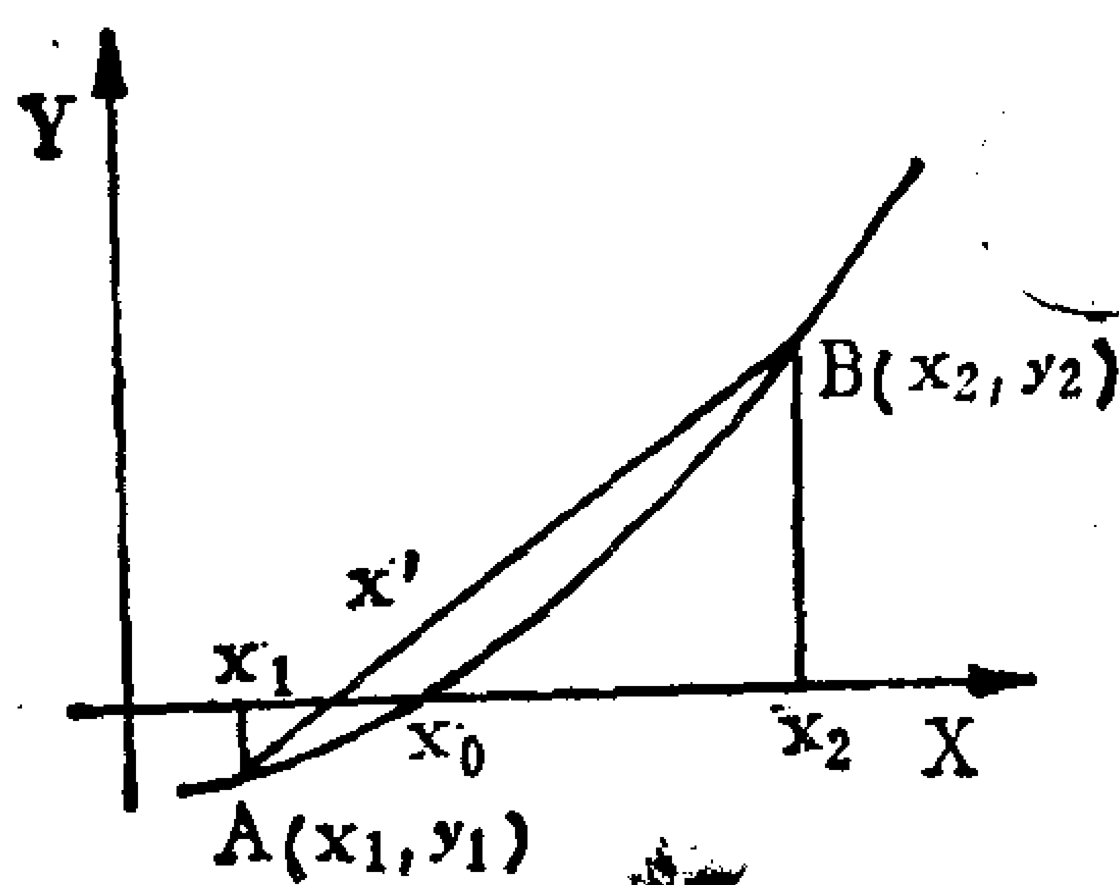


图2.4

$$y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2)$$

交OX轴于$(x', 0)$，$x' = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}$，就是方程$f(x) = 0$的近似解。

在上例中，$x_1 = a', y_1 = -b'; x_2 = a, y_2 = b$，得

$$x' = \frac{a'b + ab'}{b + b'}$$

这是"盈不足"章后12个题的基本解法。

由此可见，在这一章中，实际上是把"盈、不足"当作一个一般的解决问题的模式运用的。把实际问题处理成（数学处理）"盈、不足"的形式，然后用解"盈、不足"问题的算法"盈不足术"来求解。用现代术语来说，就是采用了数学模型法，这个模型是"盈不足"问题，不过《九章算术》中并没有提出这个模型的表达式，模型的表达也包括在解模型的"术"中了。因此，这一章实际上是介绍了一种常用数学模型及其用法。即这一章以模型建章。

值得注意的是，在上例中，如果$f(x)$是一次函数，x'就是$f(x) = 0$的一个精确解，如果$f(x)$不是一次函数，x'就是近似解，多次用此方法，可以逐步逼近精确解，"盈不足"章的第11、12和19题就得出这种近似解。这种方法，在现代解某些高次代数方程和超越方程时还有应用。这种盈不足术实际上就是线性插值法，也称为试位法，双设法等等。是《九章算术》的一项重要贡献。

2.3 算法化的内容

《九章算术》的主要内容是什么呢？就是"术"。书中一般是先提出问题、给出答案，再给出"术"，作为一类问题的共同解法，以后可以利用它来解决其他同类问题。解决实用问题是《九章算术》，也是中国古代数学的主要目的。因而"术"就是《九章算术》的主要内容，"术"在实际上就是一种算法，所以我们说，《九章算术》思想方法上的特点之一是内容的算法化。

1. "术"是算法

以"方田"章的"约分术"为例来说明这一点。在前举"方田术"之后，有

"5.今有十八分之十二。问约之得几何。答曰：三分之二。

"6.又有九十一分之四十九。问约之得几何。答曰：十三分之七。

"约分术曰：可半者半之，不可半者，副置分母子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。"

这里又是通过个别问题引入了一个一般的"术"，此术提供了一种求两数最大公约数的算法，这是《九章算术》的一个重要成就，与古希腊欧几里得的《几何原本》中的用来求最大公约数的"欧几里得算法"，有异曲同工之妙。

"约分术"的意思是：若分子、分母全是偶数，则可用2约简。若分子、分母不全是偶数，则把分子、分母（表示它们的算筹）分别放于不同的地方，然后由较大的数减去较小的数，并辗转相减直到两边所得的数相等，就用这个数（等

数）来约分。这个等数就是分子和分母的最大公约数。利用约分术实际上可求任意两个数的最大公约数。第6题按此术所作的计算如图2.5所示，求出49和91的最大公约数7。

值得注意的是，即使用现代的“算法”观念来考察这个术，它也是一个合格的算法，它具有这样几个特点：

91	49
(91－49＝)42	7(＝49－42)
(42－7＝)35	
(35－7＝)28	
(28－7＝)21	
(21－7＝)14	
(14－7＝)7	

图2.5

(1)是严格“一义”的规定，不可能有歧义的理解；

(2)在执行这个“术”时，每一时刻都知道下一时刻（或每一步都知道下一步）怎么办；

(3)能解决求两个数(任意正整数)的最大公约数这一类问题；

(4)由于任意给定的数都是有限的，辗转相减，一定能在有限步内减到“最后”一步（如两数互素，最后减到两边都得1），即能在有限步内得出结果。

这是一个能行且可计算的算法。按照它规定的步骤，任何人利用算筹(或利用笔算)都能求出解来。对于现代计算工具——电子计算机——来说，如果我们把约分术译成算法语言，也是可计算的算法。例如可译为下述BASIC语言程序：

```
10  HOME
20  PRINT"ENTER TWO INTEGER:"
30  INPUT"X1 =";  X1
40  INPUT"X2 =";  X2
45  IF  X1 =X2   THEN 80
50  IF  X1 <X2   THEN 80
60  A=X1 : B=X2
70  GOTO 90
80  A=X2 : B=X1
90  Q= 0
100 Q=Q+ 1
110 IF A-Q*B>B  THEN GOTO 100
120 IF A-Q*B=0  THEN GOTO 150
130 T=A:A=B:B=T-Q*B
140 GOTO 90
150 PRINT
152 PRINT  "  ";
155 PRINT  "(";  X1;  ",";  X2;  ")=";  B
160 END
```

《九章算术》中的多数"术"都具有这种性质，当然，也有些题的"术"是表示算法在本题中的具体用法的，其适用的问题类较小。但从主要的和重要的"术"来说，确实都是算法，都具有上述性质。

再以"方程"章的"方程术"来进一步探讨内容的算法化问题。

"方程"章的第1题是"今有上禾三秉，中禾二秉，下禾

一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何。答曰：上禾一秉，九斗四分斗之一；中禾一秉，四斗四分斗之一；下禾一秉，二斗四分斗之三。”（译文：有上、中、下三等稻禾，各捆成束。上等稻禾 3 束、中等稻禾 2 束、下等稻禾 1 束，共收得稻谷39斗；上等稻禾 2 束，中等 3 束，下等 1 束，共收得稻谷34斗；上等 1 束，中等 2 束，下等 3 束，共收稻谷26斗。问一束上等、中等、下等稻谷各能打谷多少斤。）

“方程”章给出“方程术”来解这类问题。“方程术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗，于右方。中、左禾列如右方。以右行上禾遍乘中行而以直除。又乘其次，亦以直除。然以中行中禾不尽者遍乘左行而以直除。左方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实。求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实。余，如中禾秉数而一，即中禾之实。求上禾亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实。余如上禾秉数而一，即上禾之实。实皆如法，各得一斗。”

前面我们说：“术”是算法，因而具有能解决一类问题的一般性。这里却就题论题，只引入了第一题的数据。这是为了避免凭空陈述的困难，如刘徽注中所说，“以空言难晓，故特系之禾以决之”的意思，并不是此术只适用于此题，后面各题皆用了这个术。

按术的头一句，是用算筹按直行（列）右、中、左的次序列出禾与实（图2.6）。图中所示的数字叫筹算数字，后面还要详述。这个数表相当于用现代数字写出的数表（如下页图2.6下）。

若设上、中、下禾一秉之实各为 x、y、z，则这相当于列出一个线性方程组（如下页数表之下）：

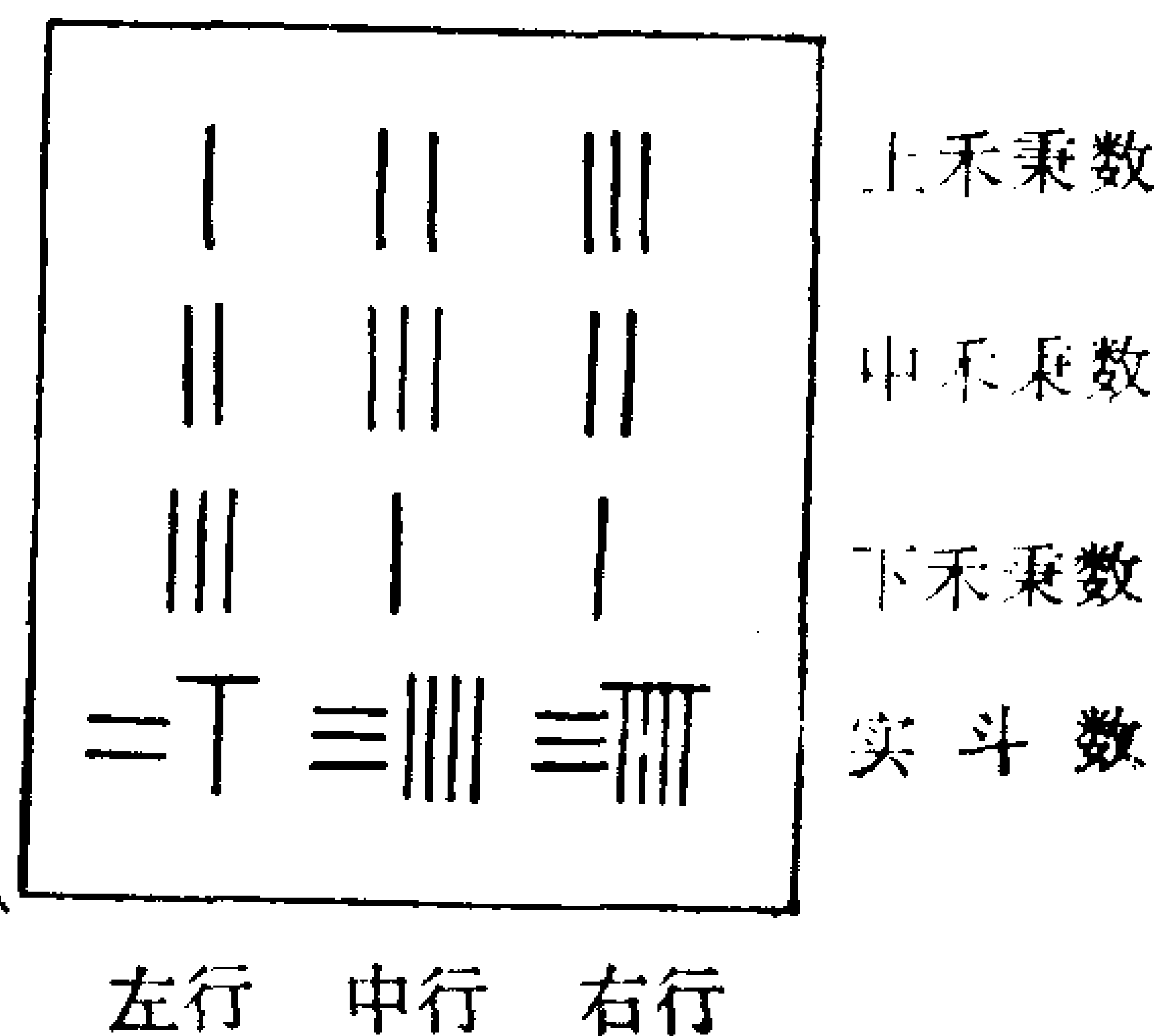


图2.6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

“方程术”实质上给出一个求解线性方程组的算法。“空言难晓”，我们也结合第一题的解法采用列表的方法，来分析、解释上面的术文。

不难看出，这种解法与现代解法十分接近：相当于利用线性方程组的系数增广矩阵进行初等变换法来求解，只要把表2.3中所示的矩阵进行一次转置就得到现在常用的行变换

表2.3

序号	原文	解释	算筹布列
1.	置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉…于右方	把图2.6中所示的12个数据按右、中、左三列排成一个方阵，即前述数表。	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$ ③ ② ①
2.	以右行上禾遍乘中行而以直除	以右上角的数遍乘中行各元素。即 3 ×②＝④。再逐次减去右行的对应元素，直到中行的第一元素为0为止。即 ④－2 ×②＝⑤	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix}$ ③ ④ ① $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix}$ ③ ⑤ ①
3.	又乘其次，亦以直除。	又用右行第一个数遍乘左行各元。相减直到左行第一个数为0为止。即 3 ×③－①＝⑥	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix}$ ⑥ ⑤ ①

序号	原文	解释	算筹布列
4.	以中行中禾不尽者遍乘左行，而以直除	以中行中间的那个不为0的数，遍乘左行各元。然后从中逐次减去中行各个对应元素。即 5×⑥－4×⑤＝⑦	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 29 \end{pmatrix}$ ⑦ ⑤ ①
5.	左方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实。	左行中第三个数不为零，以它为除数，最下面的一个数为被除数，作除法。所得的结果就是下禾之实： $\frac{99}{36}=\frac{11}{4}$(斗)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 11 & 24 & 39 \end{pmatrix}$ ⑧ ② ① ⑧式相当于$4z=11$
6.	求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实。	以下禾的法(分母)遍乘中行，减去左行各元素，即 4×⑤－⑧＝⑨	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 20 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 11 & 85 & 39 \end{pmatrix}$ ⑧ ⑨ ①
7.	余，如中禾秉数而一，即中禾之实。	作一次除法：85÷20＝$\frac{17}{4}$。得中禾每秉为$\frac{17}{4}$斗。(对中行两数约分，后一数即中禾实数的分子)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 11 & 17 & 39 \end{pmatrix}$ ⑧ ⑩ ①

序号	原文	解释	算筹布列
8.	求上禾、亦以法乘右行下实而除下禾、中禾之实。	用中、下禾每秉实数的分母(法)遍乘右行，然后逐次减去左行、中行的对应元素，使右行中间两数为0 4×①−2×⑩−⑧=⑪	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 11 & 17 & 111 \end{pmatrix}$ ⑧ ⑩ ⑪
9.	余如上禾秉数而一，即上禾之实。	12与111约分，得$\frac{37}{4}$ 37即上禾实数之分子	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 11 & 17 & 37 \end{pmatrix}$ ⑧ ⑩ ⑫
10.	实皆如法，各得一斗。	将上、中、下禾之实(分子)皆以“法”除之，得出各禾每束可得的稻谷数。	$x=9\frac{1}{4}$ $y=4\frac{1}{4}$ $z=2\frac{3}{4}$

法。这是《九章算术》的一项了不起的成就，西方采用线性方程组的系数增广矩阵变换法已是近代的事，比《九章算术》要晚近2000年。另一个值得注意的是，“方程术”中实质上是用算筹排布的特定位置表示特定的未知数，因此虽然没有采用

未知数符号，但已含有设未知数解方程的意思。后来，在这一方面也大有发展，但始终都以算筹排布的一定位置当作一定的未知数。因此，只要列出系数表（算筹布列）就相当于列出了有关的方程（或方程组）。

"方程术"也具有前面指出的算法性质，利用它可解决一类问题。这个"术"也可写成现代算法语言程序，然后在电子计算机上应用。实际上，现代解线性方程组的算法程序，也确实与它相似[1]。

2. "术"是《九章算术》的主要内容

《九章算术》中多数"术"都与上述两术相似，它们就是这部著作的主要内容。例如"方田"章，主要要解决各种形状的田地面积的有关计算问题，其主要内容当然不是个别的例题而是一般的计算方法，即"术"。"方田"章中的内容列如表2.4。

从表列内容不难看出，"术"是主要内容。所以称为内容算法化。《九章算术》共收入术202个，几乎每题一术，可见题是作为引入术的例子采用的，术是要阐述的主要东西。

注意，"术"和现代数学公式有相同点，但是也有很大差别。其相同点是都可以用来解决一类有关问题。其差别是公式只提供了几个有关的量之间的关系，指明通过哪些运算可由已知量求出未知量，但并没有列出具体的运算程序，一般地，认为这种程序是已知的了。但"术"则由怎样运算的详细程序构成的，可以说它是为完成公式所指出的各种运算的具体程序，即把"公式"展开为使用某种计算工具的具体操作步骤。从这点来看，也与现代意义的算法更接近。如"环田

①见谭浩强等：《BASIC语言》，科学普及出版社，1980年，第134页。

表2.4

序号	术	意义	相应公式	有关题数	例题算草
1	方田术	求矩形田地面积的算法	$S=ab$	2	$12\times14=168$
2	里田术	长宽以里计的矩形田面积的算法	$S=kab$	2	$1\times1=$3顷175亩
3	约分术	求分子、分母的最大公约数的算法	（见前文）	2	$(91,\ 49)=7$
4	合分术	分数加法的算法	$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$	3	$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}=1\frac{50}{63}$
5	减分术	分数减法的算法	$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}$	2	$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$
6	课分术	比较分数大小的算法	$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}>0$ 则 $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$	3	$\frac{8}{21}>\frac{17}{50}$
7	平分术	求分数的算术平均数		2	$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$ 的平均数 $\frac{7}{12}$
8	经分术	分数除法算法	$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ad}$	2	$8\frac{1}{3}\div7=1\frac{4}{21}$

序号	术	意义	相应公式	有关题数	例题算草
9	乘分术	分数乘法算法	$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$	3	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{35}$
10	大广田术	第[illegible]、第9算法之合并算法		3	$3\frac{1}{3}\times5\frac{2}{5}=18$
11	(圭田)术*	等腰三角形田地面积算法	$S=\frac{1}{2}ah$	2	$\frac{1}{2}\times12\times21=126$
12	(邪田)术	直角梯形田地面积算法	$S=\frac{1}{2}(a+b)h$	2	$\frac{1}{2}\times(100+72)\times65=$23亩70步
13	(箕田)术	等腰梯形田地面积算法	$S=\frac{1}{2}(a+b)h$	2	$\frac{1}{2}\times(5+20)\times30=$1亩135步
14—15	(圆田)术	圆形田地面积算法(已知c、d)	$S=\frac{1}{4}c\cdot d$ (c-周长，d-直径)	2	$\frac{1}{4}\times181\times60\frac{1}{3}=$11亩$90\frac{1}{12}$步
16		同上(已知直径d)	$S=\frac{3}{4}d^2(\pi=3)$		

序号	术	意义	相应公式	有关题数	例题算草
17		同上（已知圆周）	$S=\frac{1}{12}c^2\ (\pi=3)$		
18	（宛田）术	球冠形（一说扇形）面积	$S=\frac{1}{4}c\cdot d$**	2	$\frac{1}{4}\times30\times16=120$步
19	（弧田）术	弓形田地面积算法（b-弦长，h-弦心距）	$S=\frac{1}{2}h(b+h)$**	2	$\frac{1}{2}\times15\times(30+15)=1$亩$97\frac{1}{2}$步
20	（环田）术	圆环形田面积算法	$S=\frac{1}{2}(C+c)(R-r)$	2	$\frac{1}{2}\times5(122-92)=2$亩55步
21	（密率）术	把圆环割补成等积的等腰梯形求积			
合计	21 个 术			38题	

注：* 括号表示书中“术”前无名，据题意写出术名。

** 错误。

术”，公式是$S=\frac{1}{2}(C+c)(R-r)$，实际的用算筹的操作步骤则是“并中外周而半之，以径乘之为积步”（即：把内外周长相加，其和除以2，商乘以内外半径之差（“径”）就得面积）。这就是“环田术”的术文。比较复杂的“术”，如“约分术”更是这样，见前文分析。《九章算术》中的“术”，译成现代术语，可以译为公式，但应注意，它实际上是公式的计算程序形式，即把公式展开成为利用工具的计算程序——这正是现代意义的算法。

算法化的内容是适合于开放的归纳体系的。体系的开放性，决定了数学要不断与社会生产、生活实践进行信息交换，也就是要解决实际问题。而对解决实际问题来说，所要求的一般是具体的数据，这就要解决一系列的计算问题。解决计算问题的最好方法莫过于找到解决各类问题的算法，有了算法，可以迅速求解一类问题，从而指导实践。《九章算术》的主要内容为算法，因而促进了对各种算法的研究，取得了诸如开方术、割圆术、方程术、正负术等等著名算法和一大批与之有关的数学成果。不过，书中却没有指出算法的来源，更没有提供算法是否合理的证明。这是否表明它们是人们对实践经验的总结呢？实际上，这更说明了《九章算术》体系的开放性和归纳性，同时，缺乏证明，没有形成严格的理论则成为《九章算术》的主要缺点。

2.4 模型化的方法

“《九章算术》具有模型化的方法”，指的是从数学方法论的角度看，这部著作中用来建构体系的方法是数学模型法。

1. 数学模型的含义

现代认为，“数学模型乃是针对或参照某种事物系统的特征或数量相依关系，采用形式化数学语言，概括地或近似地表述出来的一种数学结构”①。古代的数学模型当然没有这样严格，但如果不要求“形式化的数学语言”，对“数学结构”也作简单化的解释，则仍然可以应用这个定义。按此定义，数学模型与现实世界的事物有着不可分割的关系。与之有关的现实事物叫做现实原型，是为解决原型的问题才建立、应用数学模型的。数学模型和现实原型的关系如图2.7所示。

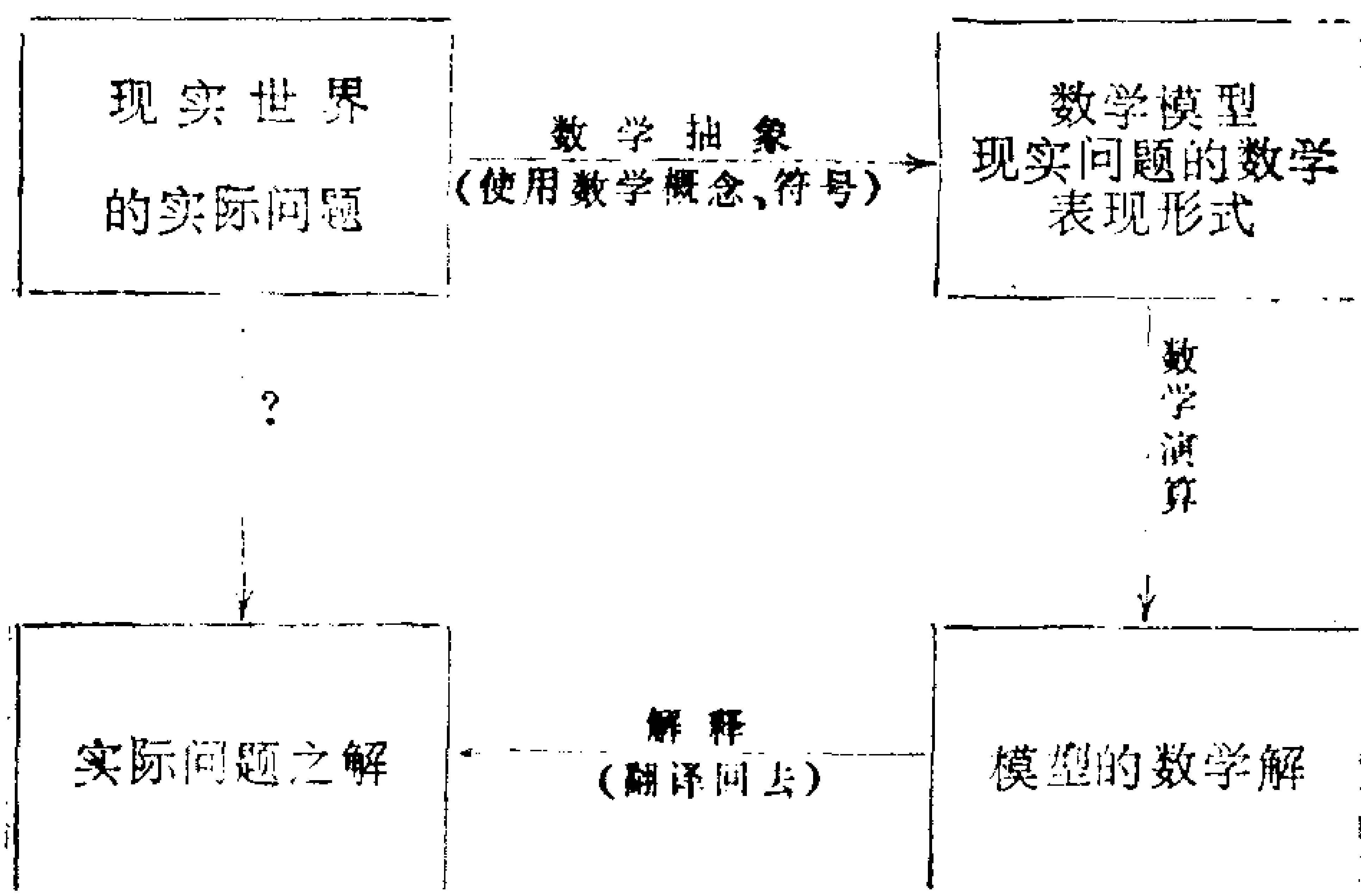


图2.7

2. 《九章算术》的数学模型法

《九章算术》所采用的基本方法符合前面对数学模型的定义。例如前节中所分析的“盈不足”章以数学模型立章，“盈不足问题”就是所采用的数学模型。

① 徐利治：《数学方法论选讲》，华中工学院出版社，1983年，15页。

“勾股”章也是以数学模型建章的，它提供了另一种常用数学模型：直角三角形。这一章是这样开始的：

“1.今有勾三尺，股四尺，问为弦几何。答曰：五尺。(2．3.题略)

“勾股术曰：勾股各自乘，并而开方除之，即弦。又股自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即勾。又勾自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即股。”

中国古代称直角三角形的短直角边为勾，长直角边为股，斜边为弦(原意“勾”是水平边，“股”是竖直边)。“勾股术”就是已知直角三角形的两边求第三边的算法。接着，这章又举出19道应用问题——都是用直角三角形这一数学模型来解决的实际问题，它们在模型中都是解直角三角形的问题：已知某些元素，或按已知可得某些元素，求另一些元素(边)。每题都有“术”，给出解这一问题的具体算法，题的结果往往提供了一组勾股数，下面列表分析其中前10题的原型、模型关系，并用现代数学语言表示每题的“术”，列出该题给出的勾股数（表2.5)。表中，用 a、b、c 表示直角三角形的三条边，依次是勾、股、弦。由表不难看出，“勾股”章中模型法的应用是很纯熟的，其中一些题，如第11、12、13等题，由原型到模型的对应是需要一定技巧的。

“方程”章如第二节所述，是以方程作为数学模型的，其中的题都是利用方程求解的应用问题。“盈不足”、“方程”、“勾股”等章是以数学模型建构起来的，每章提供一种常用的数学模型。其他各章是按社会生产、生活的领域划分的，它们怎样应用数学模型方法呢?

“方田”章的“术”我们在前一节中作了列举，现在考察1个题：

表2.5

题号	原型问题	模型问题	相应公式	勾股数
4	圆木做方板，知圆径、板厚，求板宽	知弦、勾，求股	$b=\sqrt{c^2-a^2}$	7，24，25
5	圆柱(树)外围葛，知柱高、圆径，求葛长	知勾，可得股，求弦	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	20，21，29
6	池中芦苇，知池边长，苇出水高，求水深、苇长	知勾，弦股差，求股，弦	$c=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}+(c-b)$	
7	立木末端系绳，知绳拖地上之长及绳拉直处距木距离，求绳长	知勾，弦股之差，	$b=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{c-b}-(c-b)\right]$	8，$9\frac{1}{6}$，$12\frac{1}{6}$
		求股，弦	$c=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c-b}+(c-b)\right)$	
8	木倚墙上，上端与墙齐，把木下端再离开一尺，木倒于地上，墙高1丈。求木长	已知同上，仅求弦	同上式c	00，495，505

序号	原型问题	模型问题	相应公式	勾股数
9	圆木埋墙中，锯深入1寸，锯道长1尺，求圆木直径	知勾，弦股差之半，求弦	$c=\frac{\frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{c-b}}{2}+\frac{c-b}{2}$	10，24，26
10	对开的门，开门离门槛1尺时，两门边距2寸，求门宽	知勾，弦股差，求弦的2倍	$2c=\frac{a^2}{c-b}+(c-b)$	100，495，505
11	门高比宽多68寸，两对角之间长1丈，求门高、宽	知弦、勾股差，求勾，股	$a=\sqrt{\frac{c^2-2(\frac{b-a}{2})^2}{2}}-\frac{b-a}{2}$ $b=\sqrt{\frac{c^2-2(\frac{b-a}{2})^2}{2}}+\frac{b-a}{2}$	28，96，100
12	用竿量门，横量多4尺，顺量多2尺，斜量正好，求门的长宽，对角线长。	知弦勾差，弦股差，求勾、股、弦	$a=\sqrt{2(c-b)(c-a)}+(c-b)$ $b=\sqrt{2(c-b)(c-a)}+(c-a)$ $c=\sqrt{2(c-b)(c-a)}+(c-a)+(c-b)$	6，8，10
13	高1丈的竹子立在地上，折断后上端至地，离下端3尺，求折点的高度。	知勾、股弦和，求股	$b=\frac{1}{2}\left((c+b)-\frac{a^2}{c+b}\right)$	3，$4\frac{11}{20}$，$5\frac{9}{20}$

"25.今有圭田广十二步，正从二十一步。问为田几何。答曰：一百二十六步。

"术曰：半广以乘正从。"

这里的问题是实际问题：计算田地面积，但问题中提出"圭田"，这实际就把问题模型化了。"圭田"——等腰三角形的田，就是解决实际问题的数学模型了。"术"是解决模型问题的算法。在这一章里，问题本身是来自原型的，是原型中的问题，但提出问题时进行了模型化的工作，例如，提出"圭田"这种模型，因而，问题已是模型化了的问题。"术"是针对模型的算法，它具有一般性，把问题中的数据代入"术"就得出实际问题的解。这种方法现在也是使用着的，例如物理学中所研究的"理想气体"问题，当我们指出某一气体按理想气体处理时，就已把问题模型化了——可以用理想气体方程求解。"方田"章的模型方法可用图2.8表示。

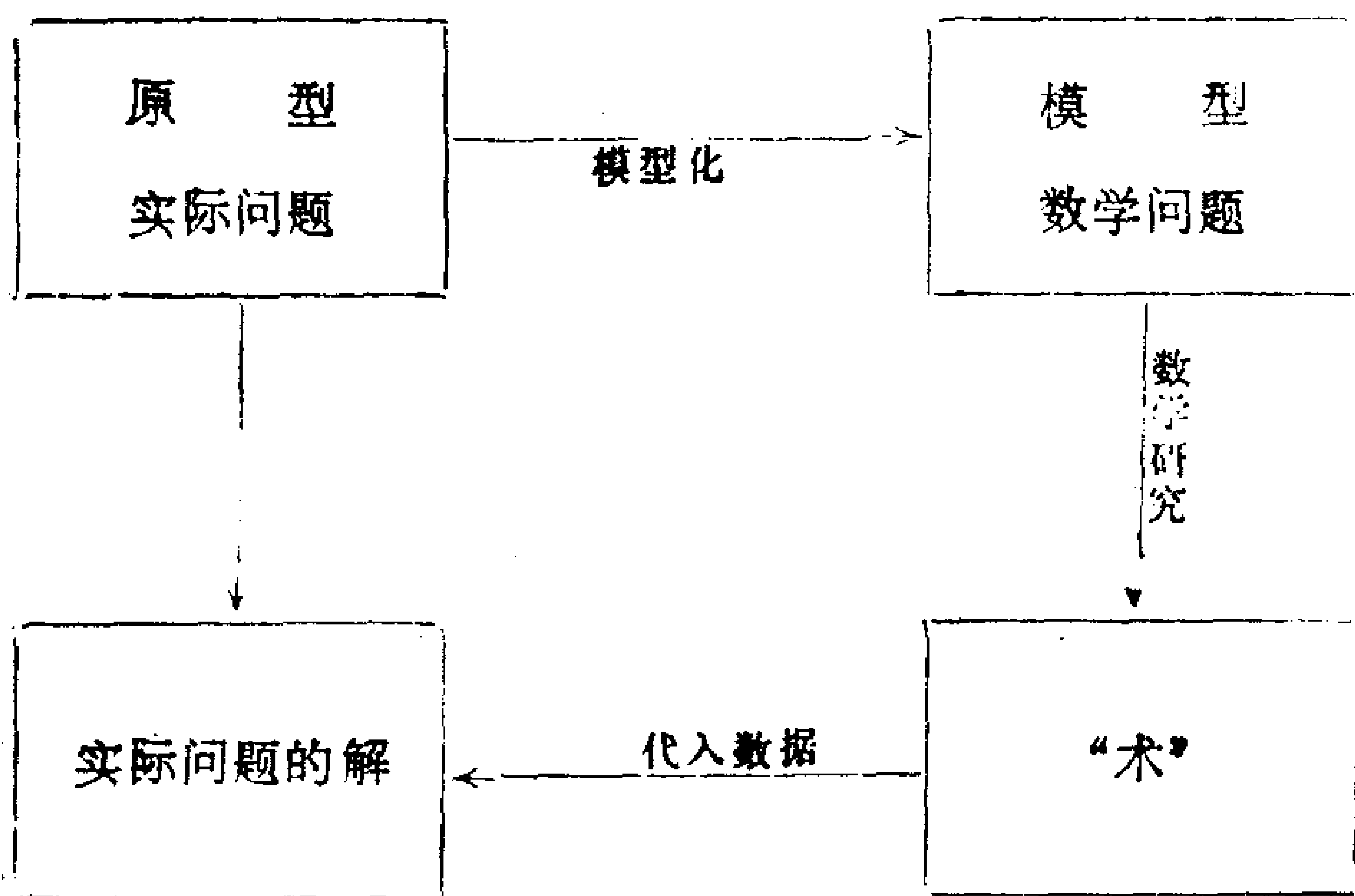


图2.8

"粟米"、"商功"、"均输"等章都采用了这种数学模型方法。

"衰分"章从 1 到 9 题是利用了如"勾股"章那种先确定数学模型(这里是按比例分配(衰分)的问题)，再引入利用这种数学模型的问题的方式。后11题则采用了"方田"章的方式应用数学模型法。

"少广"章前11题的方法与"方田"章的方法相同，不过内容稍异：是已知田地面积及一边长，求另一边长的实际问题。也是通过问题及"少广术"表达出所采用的数学模型。12题以后的13道题则具有另一种形式：它们脱离了具体的"实际"问题，虽然还保有"应用问题"的形式。它们可以看作是纯粹的数学问题，是用以引入某些算法的，例如开平方术、开立方术、开立圆术(已知球体积求其直径)等。与之相类似的还有"方田"章的第 5 —16题，由它们引入了分数的各种运算方法(表2.4中的序号 4 — 9 的"术")。"商功"章的第 7 —20题也是这种形式，由它们引入了各种立体体积的算法。这些当然也可以说是一种广义的备用的数学模型，一般地，我们把它们看作为研究数学模型提供的一些必要的模型推导方法。例如以后各章及"方田"章后面的题中就不断遇到分数运算，就可以直接用前面提供的方法，可以说，它们是为数学模型方法服务的。

模型化的方法是适合于开放的归纳体系的。因为模型化的方法提供了适合广泛应用的模式，可以把它应用到许多领域中去。开放的归纳体系的建立当然也受到模型化方法的影响：由于数学的建构采用了数学模型方法，因而可以应用到人们的社会生产、生活的各个领域中，并且构成了开放的归纳体系。

模型化的方法与算法化的内容也是互相促进的。从现代的观点看，对一个问题，只有建立了数学模型之后，才能按模型(数学问题)建立算法，进行计算、求出结果；但算法本身有时也就是数学模型。在《九章算术》的时代，理论上看也是这样：构造模型是算法化的需要，反过来模型也只能用算法求解。但由于当时的问题比较简单，人们对问题、模型、算法的分野并不太清楚。所以在表述形式上，有时模型与问题相结合，有时又与算法表述在一起。

2.5 计算工具——算筹

《九章算术》与中国古人长期使用的计算工具——算筹——有着不可分割的关系。这部著作的主要内容就是利用算筹进行计算的算法。如约分术中的“副置分母子之数”，盈不足术中的“置所出率，盈、不足各居其下”，方程术中的“置上禾三秉，……于右方”等都是“运筹”的方法。应用算筹，算法依赖于算筹是《九章算术》的一大特点。

1. 算筹与筹算简介

算筹是中国古人发明的一种独特的计算工具，是用竹、玉、骨等制成的小棒：“其算法用竹，径一分、长六寸”(《汉书·律历志》)。当时一尺合现在23厘米，可知汉时算筹长约14厘米，直径约2毫米。1971年陕西千阳县西汉墓中出土的骨质算筹，长度平均为13.5厘米，与文献记载相符合。

《老子》、《荀子》等书中都有了“算”、“筹”等词，可见战国时代，算筹的使用已相当普遍了，它的起源不晚于公元前5世纪①。按第一章第二节对“算”、“筭”、“数”、“筹”、

① 梁宗巨：《世界数学史简编》，辽宁人民出版社，1980年，第39页。

“策”等几个字的古义的分析可知，算筹和蓍草是同源的。可能，算筹就是由算卦的蓍草演化来的，理论上看也是可能的：蓍草是一种植物的茎，用它来占筮的过程就是一个运算（对蓍草根数的运算）的过程。蓍草运算的结果也是先用数来表示，占筮在古代社会有重要的地位，数学中的“数与万物相关联”的思想与占筮有关，指的是数是万物的本原，与用蓍草占卜有重要联系。由蓍草进行占卜运算到用蓍草或其代用品进行数的运算是没有多大距离的。

《九章算术》中并没有关于怎样用算筹记数、怎样用算筹计算的记载。可能是因为它要研究的是应用问题和常见模型，而不是启蒙的读物的缘故。

用算筹表示数字有两种形式：纵式和横式，表示法如图2.9所示。

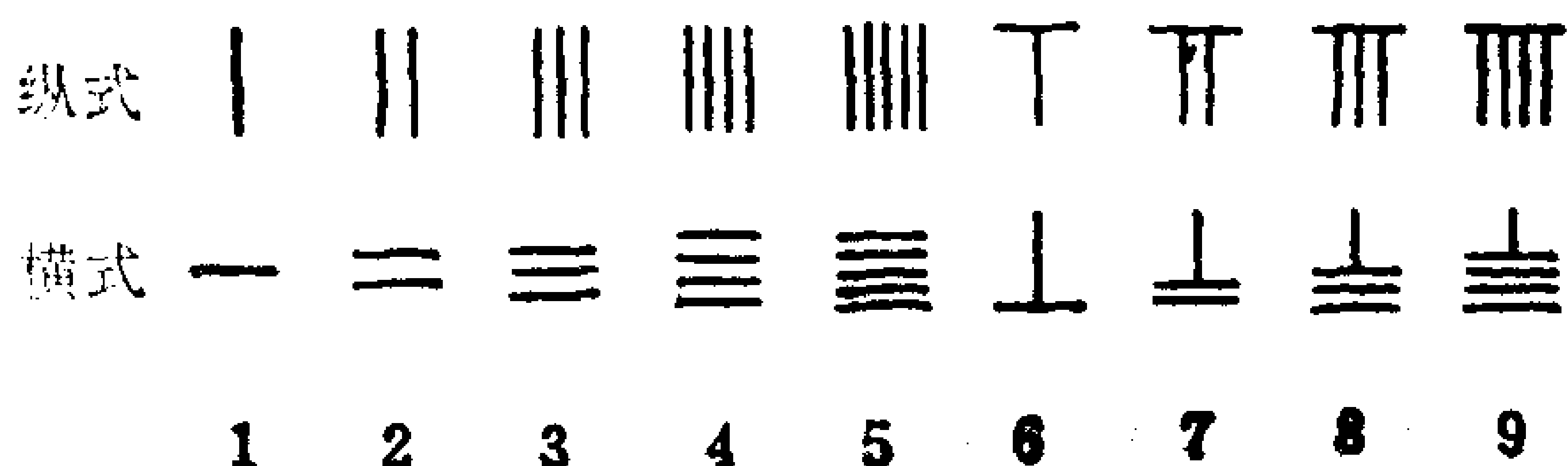


图2.9

《孙子算经》说：“凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当”。《夏侯阳算经》还说：“满六以上，五在上方，六不积算，五不单张。”（译文：要进行数的计算，先要确定各个数位。个位数用纵式，十位数用横式，千位数纵式，万位数用横式。这样交错使用纵横两式，就不会弄错数位。在记数时，六以上（六、七、八、九），用一根算筹当五，放在上面，不能并排用六根筹记六，也不能单用一

根筹表示五)。这样，由于中国古代采用了十进位值制，用上述方法使用图2.9所示的18个数字就能记出任意自然数(遇空位则空一格)。

筹算是利用算筹来进行计算的方法。先看用算筹进行加减乘除等基本运算的方法。运算时是把算筹放在毡毯或特制的算板上进行的①。

加法。把两个加数各摆一行，然后把一行数并入另一行即可。例如，12534＋3967＝16501，如图2.10所示。注意记数时筹的摆法。具体过程是由加数的高位起逐次把加数的每一位加到被加数上，加完一个数就在加数行里去掉加过的数，直到加数各个数位上的数全加完，这时就剩一行数，就是和。注意进位，如某一位上是零则空一位。

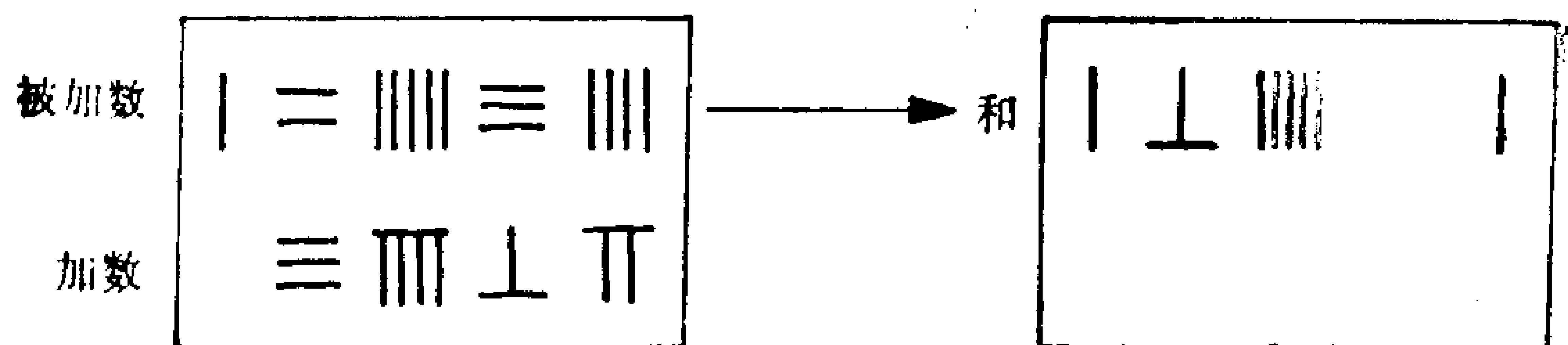


图2.10

减法。与加法同样布筹，不过运算时由上行(被减数)逐个减去下行(减数)各个数位上的数。

乘法。以简单的数学工具(算筹、算盘、笔算等)进行乘法运算，个位数相乘的乘法表是一个基础。在我国，乘法表称为“九九表”，因为古代这种表是从“九九八十一”起始到“二二如四”结束的，开头两字是“九九”，所以得名。我国很早就有了“九九表”，公元前7世纪熟记“九九表”已是普通的

① 沈康身:《中算导论》，上海教育出版社，1986年，第28页.

“技能”了[1]。筹算乘法是以“九九表”为基础的。

作乘法时，被乘数、积和乘数用筹排成三行，被乘数在上，积在中间。开始计算时只有被乘数和乘数，它们分置上下，中间留出空来。还要注意数位。表2.6以 37×58 为例说明用筹作乘法的具体方法。

除法。作除法运算时算筹也摆作三行。最上一行是商，中间一行是被除数（称为“实”），下边一行是除数（“法”）。开始时除数摆在被除数够除除数的第一位数之下，除过一次向右移一位，除完为止。以4318÷17为例列表（表2.7）说明作除法的方法。若除不尽，则“实”行保留余数，如4328÷17最后得

商	‖	☰	‖‖
实		一	
法		一	ㄒ

相当于带分数 $254\frac{10}{17}$。

再看另一种代数运算——开方运算的筹算法。《九章算术》的“少广”章给出了开平方和开立方的算法，我们来分析开平方法。以“少广”章的第12题为例说明开平方的筹算法，为清楚计，改用现代数字记数，见表 2.8。开方时算筹也摆三行，被开方数称为“实”，方根叫“商”，下行是开方过程中去“除”“实”的数，也称为“法”。三行之下还要放一根筹，叫“借算”。

① 梁宗巨：《世界数学史简编》，第42页。

表2.6

算筹摆法	说　　明
被乘数　𝍫𝍦 积 乘数　𝍭𝍧	乘数的个位数与被乘数的最高位数对齐。
𝍫𝍦 𝍩𝍤 𝍭𝍧	乘数的最高位数乘被乘数的最高位数，得出的积写在中间，积的"个位"放在乘数最高位上，数形用被乘数最高位的上位用法。
𝍦 𝍩𝍦𝍬 𝍭𝍧	乘数的第二位数(这里是个位数)乘被乘数的最高位，得出积加在上一步得出的积上。积的个位数放在乘数的第二位上。乘数的各个位数全乘完后，去掉被乘数的最高位，乘数向右移一位。
𝍦 𝍪　𝍱 𝍭𝍧	乘数的最高位乘被乘数的第二位（这里是个位)数，积加到上一步的积上，个位对齐乘数最高位。
𝍪𝍠𝍬𝍥	乘数的第二位乘被乘数的第二位数，积加到上一步积上，个位对齐乘数的第二位。去掉被乘数的第二位，乘数再向右移，直到结束(这里已结束了)，然后去掉乘数，得结果(2146)。

表2.7

算筹摆法	说　　明
商　　𝍡 被除数　𝍬 𝍢 𝍩 𝍧 除数　𝍩 𝍦	4不够17除，而43够17除，所以17置43之下。除得2，置于17的个位数之上，数形(纵横)同其同位被除数的。
商　　𝍡 被除数　𝍨 𝍩 𝍧 除数　𝍩 𝍦	从4318里减去2 ×1700，得数为新的被除数，同时除数向右移一位。新被除数为918。
商　　𝍡 𝍭 实　　𝍨 𝍩 𝍧 法　　𝍩 𝍦	91 + 17，得商5，记在17的个位数之上。
商　　𝍡 𝍭 实　　𝍮 𝍧 法　　𝍩 𝍦	从918中减去5 ×170，得数68为新的被除数，除数再向右移一位。
商　　𝍡 𝍭 𝍣 实　　𝍮 𝍧 法　　𝍩 𝍦	68 + 17= 4，记在17的个位数字之上。正好除尽，得商254。去掉下两行的数即可。

表2.8

算筹摆法						说明
商						以55225开平方为例。借算1起指示位数的作用，也代表最高次项的系数，运算中，由个位左移，每两位移一次，有一位得一数。
实	5	5	2	2	5	
法						
借算					1	
商			2			借算向左移两次，到万位下，因“实”的万位数字是5，而$2^2<5<3^2$，所以商的第一个数为2，由于借算在万位，商2位于百位。
实	5	5	2	2	5	
法						
借算	1					
商			2			借算为万位，第一位商 $2\times10000=20000$，置于“实”下的“法”行。
实	5	5	2	2	5	
法	2					
借算	1					
商			2			以第一位商2乘“法”20000得40000，由实中减去得$55225-40000=15225$，列为新实。
实	1	5	2	2	5	
法	2					
借算	1					
商			2			取“法”的2倍4，向右移一位(千位)。要求商的10位数，故应把借算移到百位上。
实	1	5	2	2	5	
法		4				
借算			1			

算筹摆法						说明
商			2	3		“实”的千位上的数为15，而 $4\times3<15<4^2$，所以商的十位数为3，置3于商的十位上，3乘以借算100为300，在法的下一位记3。
实	1	5	2	2	5	
法		4	3			
借算			1			
商			2	3		“法”上的数实际上是4300，乘以第二位商 $4300\times3=12900$，由“实”中减去得 $15225-12900=2325$，改为新实。
实		2	3	2	5	
法		4	3			
借算			1			
商			2	3		以300（3×100）加4300得4600，向右移一位，作为求商的个位数的“法”，把借算移到个位。
实		2	3	2	5	
法			4	6		
借算					1	
商			2	3	5	由 $46\times5<232<46\times6$，得第三位商为5，置于商的个位，以借算乘之，得5，加460为465。
实		2	3	2	5	
法			4	6	5	
借算					1	
商			2	3	5	以第三位商乘以“法”465，$465\times5=2325$，由“实”减之“尽”，则求出55225的平方根为235。
实						
法			4	6	5	
借算					1	

由表可见，筹算开平方法与现代笔算开平方法原理上基本一样，步骤也大体相当，不过麻烦一些而已。

以上是几种基本代数运算的筹算方法，它们是其他算法的基础。《九章算术》在这些基本算法的基础上引入了许多独特的算法，前几节我们介绍了其中一些。实际上，《九章算术》中的"术"都是使用算筹计算的算法。

2. 筹算的作用与影响

从公元前5世纪起，中国古代数学中就广泛应用了算筹，筹算在2000多年时间里是主要的计算工具（直到15世纪前后，才为由算筹发展起来的珠算盘所取代），筹算无疑对中国古代数学产生了巨大的影响。《九章算术》是在这种影响下成书的，我们通过这部著作来探讨筹算对中国古代数学的影响。

（1）促进了中国古代独特的数制的形成和发展。

中国古人在世界上最早采用了十进位值制，马克思说这是"最妙的发明之一"。① 古人用算筹记数（如图2.9所示），把这种算筹记法用笔写（画）下来，就是筹算数字，古代长期使用这种数字。

位值制记数法的一个关键符号是零号，没有零号就无法区别如1204，12004和124这样的数。零号的使用和进入运算是数学发展中极重要也是颇为困难的一步。巴比伦人采用了位值制，但他们一直缺乏适当的零号，玛雅人正式使用过零号。现在使用的"0"号是印度人在公元876年以后开始使用的②，后来经阿拉伯人传入欧洲，逐渐得到通用。而中国古

① 转引自梅荣照：《十进位值制、筹算和珠算》，载《中国古代科技成就》，第73页。

② 梁宗巨：《世界数学史简编》，40页。

代数学中的零号却是在使用筹算数字记数中自然而然地产生出来的，这是筹算方法的一大成就。

在用筹算数字记数时（用算筹摆数时也一样），某一位上没有数就用空格表示。由于各位数字纵横相间，所以不会搞错。在书写时，古书的缺字都用“口”表示，数字间的空位，往往也按书写习惯用“口”表示。书写的字体常用行书，这时方块就容易随便画成圆圈了。即以“○”作零号。文献中，最早是金代《大明历》（1180年）确切用了这种记法，如把403记为“四百○三”。注意，中国古代的○号是一圆圈，与阿拉伯数字中的扁圆 0 号是不同的。[1]

（2）促进了数学在各个领域中的应用。

筹算过程，按前述，是一个“机械化”的过程，只要掌握了运算规则，就能顺利得出结果。因此，特别适合于在各个领域中的应用：只要给出一定的数据，就能机械地得出结果来。古人具有万物与数相关联的观念，因此产生的各领域中的问题都可以用数学来解决的想法，是通过筹算得以实现的。人们在运算中使用的算筹，既是体现“数”的实物，又构成世界的一个最基本的模型：它可以代替运用数学处理的问题现实中所涉及到的一切事物。筹算在各个领域中的广泛应用促进中国古代数学——例如《九章算术》——形成一个开放的归纳体系。

（3）促进了数学内容的算法化。

因为数学中采用了算筹为计算工具，因此数学内容主要是指出在处理某类问题时的筹算方法，这也就是各种“术”中讲述的东西。《九章算术》充分体现了这一点。

---

① 梁宗巨：《世界数学史简编》，40页。

(4)促使中国古代数学成为离散化的数学。

由于各种问题是通过算筹计算求解的，算筹则是“离散化”的数学工具，它们只能表示不连续的量，所以在把问题转化为用算筹求解时就是把问题离散化了。中国古代数学的所有算法都是采用算筹（后来是用算盘，算盘珠也是一种离散的量的表述形式）的算法，所以都是离散化算法。这种算法实际上是使用离散的(或称为数值的)计算工具的一种应用程序。中国古代数学从来注意组合问题，从《周易》“八卦方位”至“纵横图”实际都是某种初步的组合数学思想的产物，在进行筹算时，算筹的布列位置有重要的数学意义，与这种思想也有一定的联系。中国古代数学的“数形结合”的方法是很典型的把问题离散化的方法。这些与算筹的使用都有直接的关系。

(5)影响了中国古代数学的符号化和抽象化。

以《九章算术》为奠基的中国古代数学著作中长期未能引入必要的数学符号。因为计算是通过算筹实现的，书籍只是记载使用算筹的算法和演算数据及最后结果，所以也用不到各种运算符号，实际上中国古代数学中并没有利用特殊的加、减、乘、除、开方和相等的符号。

社会生产、生活各领域的问题都需要具体的数据，利用算筹更离不开具体的数。因此，中国古代数学倾向于解各种具有种种具体数据的计算问题，这当然在很大程度上促进了中国古代数学的发展，但却不利于产生抽象的概念和命题，因而也就难以走向抽象化，建立严格的逻辑理论体系的方向。这两点就是筹算给我国古代数学带来的不利的影响，它们也确实是中国古代数学的两大弱点。只是到了宋代才出现了改变它们的倾向，但不久又“中断”了。

2.6 古代数学思想方法的两大源泉

——《九章算术》与《几何原本》

《九章算术》的思想方法在我国古代数学思想方法的发展中占有重要的地位。就我国几千年来数学思想方法发展的全过程来说，《九章算术》可以看作是继往开来的里程碑；就其对中国和世界数学思想方法的影响来说，可以看作奠基石；就其地位和作用来说，可以称之为典范。与《九章算术》一样，对古代数学思想方法产生过巨大影响的另一部巨著是古希腊欧几里得的《几何原本》。《几何原本》特别对后世的数学以至于科学的发展产生过重大影响。人们认为，《九章算术》和《几何原本》东西辉映，是现代数学思想的两大源泉[①]。

《几何原本》的作者欧几里得为古希腊学者，生卒年代约为公元前330年—前275年，其生平人们知之甚少，猜想他早年在雅典受过教育，公元前300年左右，到亚历山大教学。《几何原本》是对古希腊数学的整理、总结和系统化。对古希腊数学来说，《几何原本》的思想方法也具有里程碑、奠基石和典范的意义。

《几何原本》共13卷，前四卷是关于平面图形——直线形和圆——的理论，第五卷是关于比和比例问题的理论，第六卷是关于平面相似形的理论，第七、八、九卷是关于整数的理论，第10卷研究不可公度的量，后三卷研究立体图形，内容上包括了当时希腊数学在各方面的成就。在数学思想方法

① 吴文俊：《"九章算术"注释》序，读书白尚恕著，科学出版社，1983年，第1页。

上，它有如下特点。

1.封闭的演绎体系

《几何原本》是最早形成的演绎体系：是一个由一般到个别的表述体系。在形式上，它是由少数不定义概念（如点线等）和少量不证明的命题（公理和公设）出发，按一定的逻辑规则，定义出该体系中所有的其他概念，推演出所有其他的命题（定理）。

在《几何原本》中，公理是最一般的命题，它们是其后的全部演绎推理的前提，《几何原本》中的所有其他命题，都是由公理（通过适当的定义）推导出来的。除了推导所需要的逻辑规则外，《几何原本》的由一系列公理、定义、定理等构成的数学理论体系，原则上不必依赖于其他东西。当然，在实际上，《几何原本》在某些地方背离了这个原则：证明某些命题时运用了公理和逻辑之外的“直观”。但是一来，那只是个别的地方，并不影响体系的大局；二来，那正是作为《几何原本》的“缺陷”而受到人们的指责，后来人们按欧几里得的思想，不断地在体系中排除直观，得到更严格的数学理论体系，其指导思想正是由《几何原本》开始的。

从《几何原本》的逻辑结构来看，它是一个演绎体系。从《几何原本》与社会生产、生活的关系来看，它的理论体系是独立于社会生活而展开的，在其发展中也回避任何与现实生活有关的应用问题，因而对于社会生活的各个领域来说，它是封闭的。同时，《几何原本》除所用的逻辑规则外，具备了其理论推导的所有前提，就是从理论发展形式来看也是封闭的体系。

2.抽象化的内容

《几何原本》中涉及的都是一般的、抽象的概念和命题，

它所探讨的是这些概念和命题之间的逻辑关系，由一些给定的概念和命题推演出另一些概念和命题。它不考虑这些概念和命题与社会具体生活的关系，也不研究这些数学"模型"所由之产生的那些现实原型。在《几何原本》中研究了"所有的"矩形(即抽象的矩形概念)的性质，但不研究任何一个具体的矩形的实物的大小。《几何原本》研究了数(自然数)的若干性质，但却一点也不涉及具体的数的计算及其应用。在它的研究中，用线段来表示一般的数，即抽象的一般的"数"，用演绎推理来研究其性质。从它的命题自身来看是抽象的，而这正是它的主要内容。从另一方面看，具体是多样性的统一，现实世界的客观存在是具体的，《几何原本》却极力排斥其理论命题的实际应用，因而从抽象和具体的关系来看，其内容也是抽象化的。

3. 公理化的方法

作为现代数学的一种基本的表述方法和发展方式的公理法就是以欧几里得的《几何原本》开其端的。它采用了前面我们指出的比较严格的演绎体系，通常把这个体系称为公理体系，而构造公理体系的方法就是公理方法。

《几何原本》13卷，共给出475个（有的版本是477个）命题，其中10个作为公理，其余465个命题都是由公理及有关概念的定义演绎出来的。在结构上，每一卷的开头都先给出本卷中所需要的概念的定义，共给出119个定义。其中除了"点"、"线"等应作为不定义概念、还缺少一些必要的不定义概念以及个别定义不确外，基本上符合现代公理法对概念的要求。从结构上看，在第一卷开头给出的10个公理，是全书其他命题证明的基本前提，然后给出23个定义，然后再引入和证明定理。定理的引入是有序的，因为在一个定理的证明

中，允许采用的论据只有公理和前面已经经过证明的定理。以后各卷除了不再给出公理外也都照此办理，全书来看也符合这种有序性：后面各卷可以利用前面各卷中的定义、定理作为证明的依据，除了个别定理的证明不够严洛，例如利用了图形的直观等，还有个别的证错以外，大部分证明从现代公理法的角度看也是正确的。

《几何原本》的公理方法的影响是十分深远的，现代数学和各门科学中的公理方法正是由《几何原本》的公理方法发展出来的。

《几何原本》思想方法上的这三个特点也是相辅相成的。抽象化的内容是适合于演绎体系的，抽象化得到的命题具有普遍性，同时它也就是演绎推理中的一个环节，又适合于利用公理法确定它在公理体系中的位置。同时抽象命题自身又是演绎证明的产物。总之，"希腊的数学家热衷于逻辑推理与证明。在这种抽象的过程中，数学问题的实际背景消失了，数学……研究人为定义的数学对象。证明的对象是抽象的命题，被证明的命题又为更高的抽象创造了条件。"[①] 公理方法适合于应用到抽象的内容中，由公理法得到的理论体系，必然是一个演绎体系。

4. 简单的对照

《几何原本》的思想方法使得数学理论成为一个严谨的系统性理论。这是真正的现代意义下的理论，它使得人们能够在一定程度上超越当时的实践，充分发挥自己的认识的能动性，得到意义深远的理论结果——利用它们可以指导人们的实践，提高人们认识世界、改造世界的能力。在世界上提

① 乐秀成：《中国与西方数学系统结构比较》，载《自然辩证法通讯》，1984年，第5期。

出第一个理论科学体系，为后来数学以致于科学的发展作出示范、指出方向，是《几何原本》最大的贡献。其次，在数学上也获得一系列的成果。《几何原本》的缺点则是与人们的实践离得太远，实际上，由于它的封闭体系，完全脱离了人们的实践，这使得后来古希腊数学的发展产生了脱离生活，成为无源之水的困难。此外，它偏重抽象命题的证明，对数值计算重视不够，也影响了它解决实际问题的能力。

与《几何原本》相对比，《九章算术》开创了开放的密切与现实生活相联系的数学体系，从而使数学在社会实践的推动下得到不断的发展，在这种思想方法指导下，中国古代数学确实取得了光辉的成就(见本书附录)。算法化的内容则使中国古代数学具有解决实际问题的能力。这种理论联系实际的重应用、重计算的思想是推动数学发展的动力之一，因而在数学的发展中，这种数学思想具有普遍的意义。例如在17世纪分析数学产生之初，就不是靠理论的严格，而是靠实际应用的成功来保证数学的“可靠性”的，因而它得到迅速的发展，开创了数学发展的新阶段；现代应用数学是按应用方向或主要应用的数学模型分类的；把对一个数学定理的证明转化为利用适当算法的一个机械化的计算是现代数学的重要目标之一；现代数学构成一个开放的理论体系，成为各门科学的方法或工具，利用数学模型解决各方面、各领域的问题等等思想方法与《九章算术》的思想方法是相通的。

表2.9给出二者的基本比较。

可见，《九章算术》和《几何原本》的思想方法各有自己的特色，二者相辅相成，成为现代数学思想方法的两大源泉。

表2.9

项 目	《九章算术》	《几何原本》
表述体系	开放的归纳体系	封闭的演绎体系
主要内容	利用算筹的算法(202个)	抽象的命题(475个)
构造体系的方法	数学模型法	公理法
侧重的数学方法;培养的能力	计算(数值计算);计算能力	证明(定理证明);逻辑证明能力
理论体系的逻辑性	不够严格	比较严格
理论与实践的关系	密切	不密切

三 数学思想方法的进一步发展

秦汉以来，中国成为一个大一统的封建专制主义的大帝国。对于这样一个大一统的国家政权来说，它的首要功能就是组织好社会生产，正如马克思所说："一切亚洲政府所必须实现的经济功能，即建立公共工程的功能。"① 因而"中国封建社会中的国家机器并非单纯只是个上层建筑，而且也是个庞大的经济实体。"② 这样"关于经济功能或公共工程的功能，在中国历史上更为突出，不仅'男耕女织'这一农业和手工业的特殊结合方式是由政府去组织并管理，是由'大司农'以至'户部'这样公私财政统一的机构去指挥"③；而且历来的大规模治水筑城等都是在政府组织领导下进行的；政府还要组织并经营常备军武器装备的生产、皇室的各种消费品的生产，也就是说要组织和经营手工业生产及商业活动。在中国封建社会中，农业、手工业和商业主要是由国家管理或甚由国家经营。可以说，对社会生产的管理经营是中国封建社会国家机构的重要职能之一，因而在中国古代，对社会生产进行管理经营是政府官员的职责，为履行这些职责，一定的数学知识是必须的。所以中国古代教育要使士人（要做官的读书人）掌握六艺：礼乐射御书数，数就是数学。这样，社会实践向数学提出的头一个要求就是把数学应用于各个领

① 马克思：《剩余价值学说史》，第3卷，人民出版社，第447页。

② 周继旨：《中国封建社会经济结构的基本特征》，载《中国社会科学》，1983年，第5期。

③ 侯外庐：《中国封建社会史话》，人民出版社，1979年，第21页

域。这种情况，在先秦就已存在了，正是由于社会实践的这种要求，才使中国古代数学形成了《九章算术》那样的思想方法。秦汉以后，这种情况并没有发生根本的变化，只是社会生产不断向前发展，与此相应，数学思想方法也取得了进一步的发展。本章探讨汉代至唐代，《九章算术》之后数学思想方法的进一步发展，它们是《九章算术》的思想方法的继承和发展。

3.1 著名历算家的思想方法

中国古代产生了许多著名的数学家，由于中国古代数学与历法编算有密切的关系，几乎所有的数学家都参加过历法编算工作，历史上历、算并称，叫做历算家。这里，我们介绍汉唐间对中国古代数学发展作出重大贡献的几位历算家的数学思想方法。

1.刘歆的数学观

刘歆(公元前50年～公元23年)汉代人，他没有专门的数学著作传世，他的主要数学活动是编算《三统历》。这方面他提出“岁星超辰”的算法，以改进岁星(木星)的周期计算。

刘歆认为，数就是一、十、百、千、万等，人们用它们来计算事物的数量，探讨性理命运发展的规律。《书》说，要掌握万物，就要先掌握算、数的道理。万物起于黄钟之数一(黄钟管长九寸、与一尺差一寸，所以说黄钟一寸)，一乘以三，再乘以三，等等，一直乘11次三（连同黄钟数一，共12个数，即经历了“十二辰”）得到177147，这时阴阳和谐、五行相因，化生了万物。执行算法的工具是竹筹，竹筹的直径为一分，长度为六寸，271 根竹筹能构成一个底面为正六边

形的棱柱，握在手中正好够一把。这个直径表示声律中的黄钟的管围(九分)的单位(一分)、长度则是声律中林钟的长度(六寸)，成一把之数271则是占筮用的蓍草数(49)、乾卦的策数(216)和每卦爻数(6)之和(271 = 49 + 216 + 6)。凡是推算历法、确定音律、制造器皿、用规划圆及用矩验方，制定和使用度量衡，探寻事物背后的隐藏的奥秘，测量人们达不到的深远之处，没有不利用算筹和数学的。用它去度长短、量多少，称轻重都能达到比较精确的地步。有关数和计算的方法称之为"算术"，应规定为全国小学的课程。这些都由太史、羲和(两种官职)负责管理。(原文："数者，一十百千万也，所以算数事物、顺性命之理也。书曰，先其算命。本起于黄钟之数，始于一，而三之，三三积之，历十二辰之数十有七万七千一百四十七，而五数备矣。其算法用竹，径一分，长六寸，二百七十一枚而成六觚为一握。径象乾律黄钟之一而长象坤吕林钟之长。其数以易，大衍之数五十其用四十九，成阳六爻得周流六虚之象也。夫推历、生律、制器、规圆、矩方、权重、衡平、准绳、嘉量、探赜索隐、钩深致远莫不用焉。度长短者不失豪厘，量多少者不失圭撮，权轻重者不失黍絫，纪于一协于十长于百大于千衍于万，其法在算术，宣于天下小学，是则职在太史羲和掌之"①)。

由此可见，刘歆的数学观包括以下几种思想：

(1)强烈的数学实用思想。他主张把数学应用于社会生产生活的各个领域。实际上，他利用数学，编算了一部《三统历》，他还制做过全国统一的度量衡标准器，"律嘉量斛"就是其中之一。

① 《汉书·律历志》。

（2）刘歆具有早期进行数学教育的思想。一方面继承了古人把数学列为士人必修的“六艺”之一的思想；另一方面，他又提出把数学列入“天下小学”的主要课程，主张早期进行较普遍的数学教育的思想，可以看作隋唐之际数学教育大发展的先声。

（3）刘歆还有浓厚的数学神秘思想。由上文可见，他继承了《周易》以来的万物与数相关联的思想，给各种数目赋予神秘的色彩，如竹筹的尺度，一定要和《周易》联系起来。不仅如此，他在《三统历》的编算中，也一再采用了赋予各种数据神秘意义的作法。例如《三统历》之“三统”来历，他就说，最大的天数是9，最大的地数为10，其和为19，而黄钟（长度）自乘为81，81×19＝1539，所以1539年为一“统”，而“三代各据一统，明三统常合，而迭为首”，故称为《三统历》。这种神秘思想则对后世数学发展起着消极的作用。

2.《九章算术注》的基本思想方法

刘徽是三国时魏人，在公元263年为《九章算术》作注解10卷，其中第10卷“重差”，唐代开始以《海岛算经》为名成另本。刘徽的《九章算术注》全面阐发了原书的“术”，并且引入了一系列数学新成果，主要有：十进小数，分数通分法，求两数最小公倍数的方法，正负数的计算规则，解线性方程组的方法等等，求圆周率的方法和圆周率$\pi=3.14$、$\pi=3.1416$，提出重表法、连索法和累矩法等三种测量方法，尤其重要的是，他在世界上是第一个在数学中运用极限思想的；他提出了独具特色的“出入相补原理”，发展了古代的形数结合的思想。这两点，后面专门探讨，这里只探讨刘徽《九章算术注》的基本的思想方法。

刘徽的基本思想方法是对《九章算术》思想方法的继承和

发扬。

刘徽的成就也是通过"术"（对《九章算术》中的"术"的注解或新创建的"术"）来表达的，有的成就本身就是一个"术"，例如"齐同术"、"割圆术"、"正负术"、"方程新术"等。后来成为独立的著作的《海岛算经》与《九章算术》在体系、内容和方法上都是一致的：共收入9个题、都是当时社会生产和生活中所遇到的实际问题，如测远处岛高及岛远，测山上树高及山的远近、测远处城郭的大小及远近，测谷深、楼高、河宽、水深等等；主要内容也是"术"——求解该类问题的一个算法，《海岛算经》共列出10个"术"；主要采用了数学模型法，与《九章算术》相同，在问题中就归纳出模型，再用"术"表述出来；所谓"术"也是使用算筹计算的算法。

刘徽通过为《九章算术》作注来表述自己在数学上的研究成果，说明他是赞同《九章算术》的基本思想方法的。刘徽也是把数学应用于社会生活的各个领域中去的，在注文中，他对刘歆所造"律嘉量斛"进行了核算。在另一处（"商功"章第25题注），对当时用的一种标准量器——"大司农斛"进行了推算。刘徽使《九章算术》的算法更正确、更完善，同时也更便于利用。所以，他实际上是全面继承并发展了《九章算术》的思想方法，他对《九章算术》的注解同原书一道，成为中国古代数学的基石，对后世产生了巨大的影响。刘徽在中国古代数学中首次引入比较严格的证明，则是对《九章算术》思想方法的深化，具有重大的历史意义。

3."出入相补原理"是数学证明的基础

"出入相补原理"，又称"以盈补虚法"，是刘徽发展并系统化了的一种独特的数学方法。先看两个例子。

例1 "方田"章第26题注。

题："又有圭田广五步二分步之一，从八步三分步之二。问为田几何。答曰：二十三步六分步之五。术曰：半广以乘正从。"注："半广者，以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广。按半广乘从，以取中平之数。故广从相乘为积步。亩法除之，即得也。"这是求等腰三角形的面积。"广"是其底边，"正从"是底边上的高。注文说的两种"以盈补虚法"分别由图3.1的a和b表出。前者以△①补在△②的位置，后者以△③补在△⑤的位置同时以△④补在△⑥的位置。都是把等腰三角形田变换成等积的矩形田（直田）再利用"方田术"求面积。

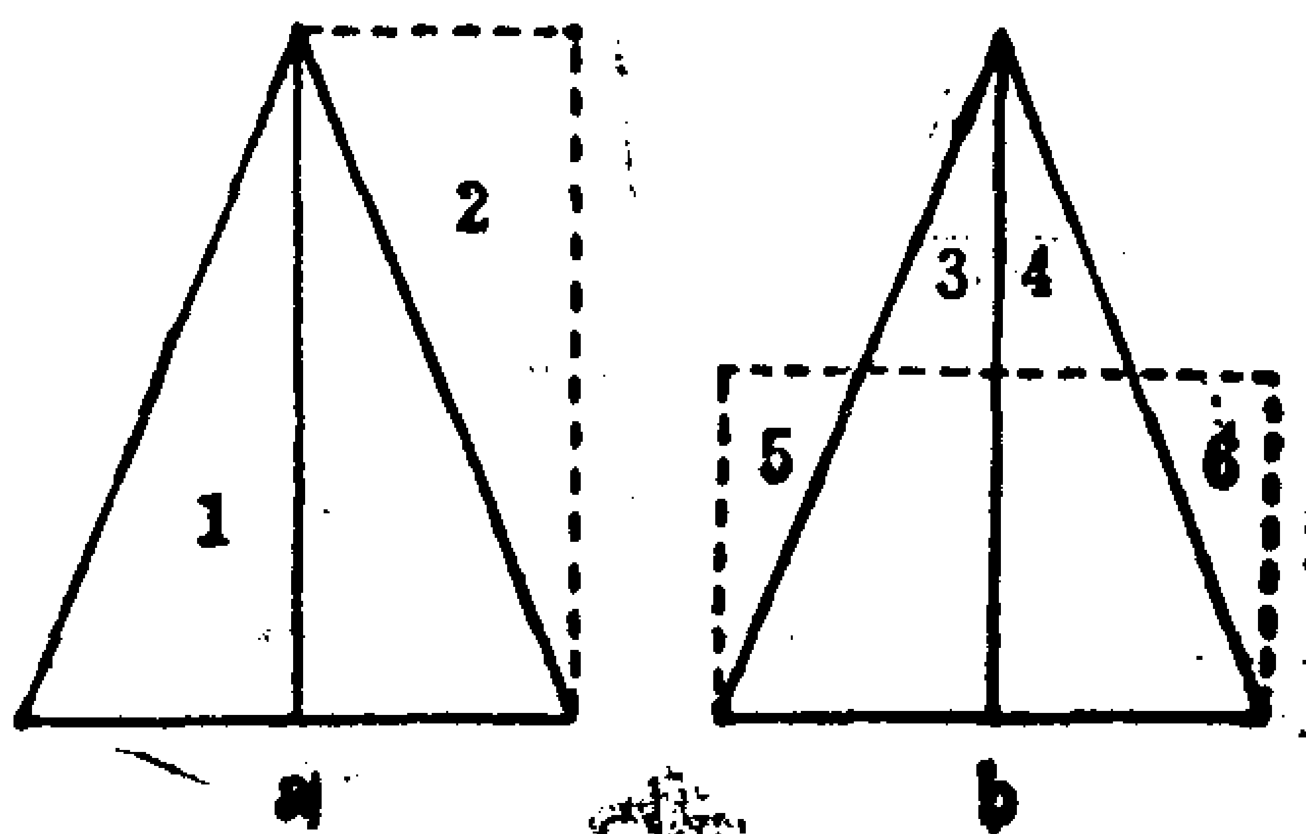


图3.1

例2 勾股术注。

"勾股术曰：勾股各自乘，并而开方除之，即弦。"刘徽注："勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也。合成弦方之幂，开方除之，即弦也。"与注相对应，刘徽还绘出图（已佚）。现按清人李锐（1768—1817）的说法补图（如图3.2），释刘徽的注解如下：

如图，$\triangle ABC$为直角三角形，以勾为边的正方形为朱方（刘徽图中以色涂之），以股为边的正方形为青方。以盈补

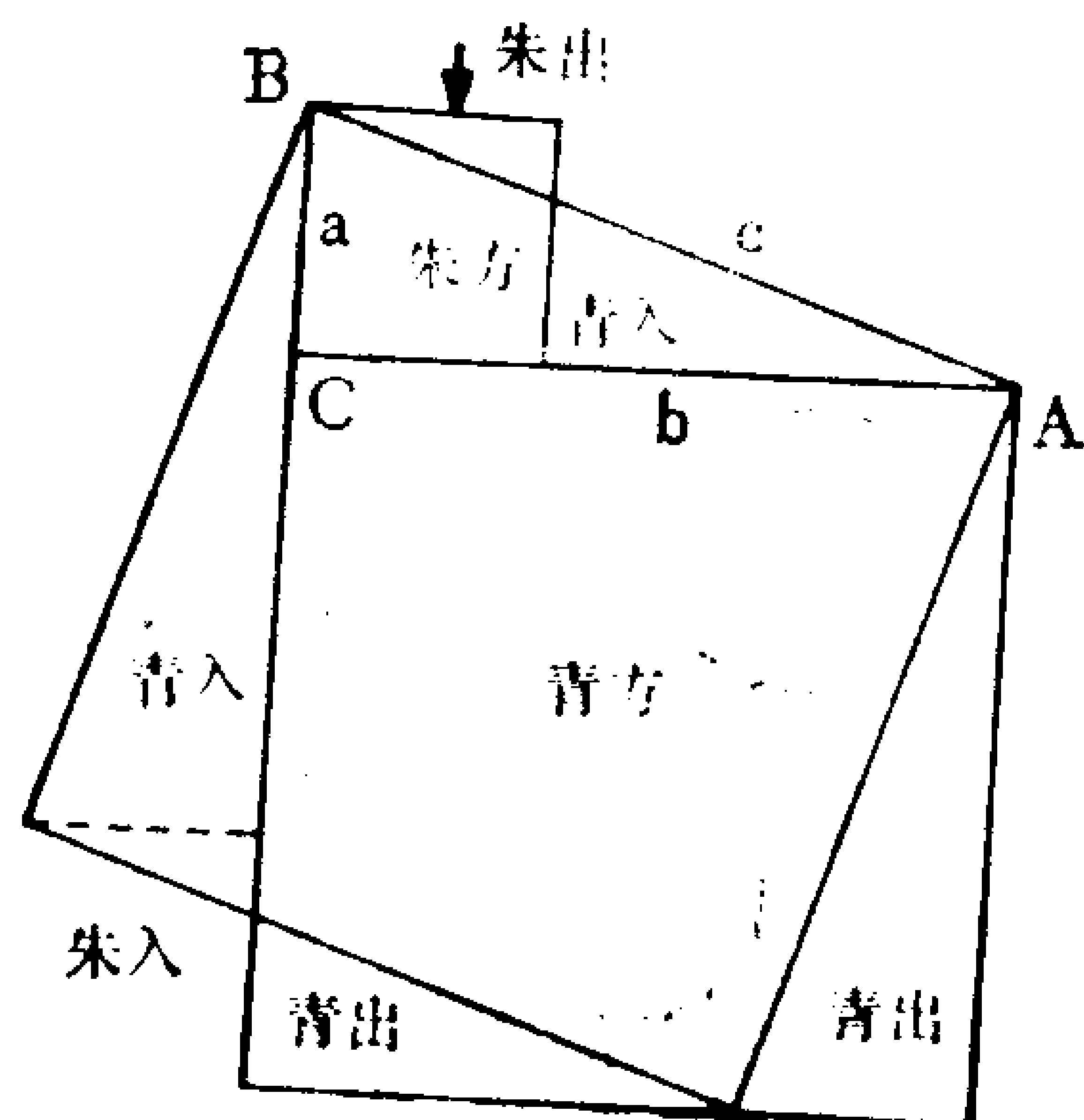


图3.2

虚，将朱、青二方并成弦方。依其面积关系有$a^2+b^2=c^2$。由于朱方、青方各有一部分在弦方内，那一部分就不动了。

这两例都用到了出入相补原理，这是中国古代一个关于"形"的问题求解的一个重要原理，"用现代语言来说，就是指这样的明显事实：一个平面图形从一处移置他处，面积不变，又若把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和、差有简单的相等关系。立体的情形也是这样。"① 刘徽不仅在"方田"、"商功"、"勾股"等章涉及到图形的问题中一再运用这个原理，并且在其他问题，例如开平方、开立方及解二次方程中应用了出入相补原理。

"少广"章的开平方术前章已作了介绍。刘徽在注中用出入相补原理进行了论证。在论证中首先把数的开平方归结为求一个已知面积的正方形的一边长（如图3.3所示）。

① 吴文俊：《"九章算术"与刘徽》，北京师范大学出版社，1982年，第58-59页。

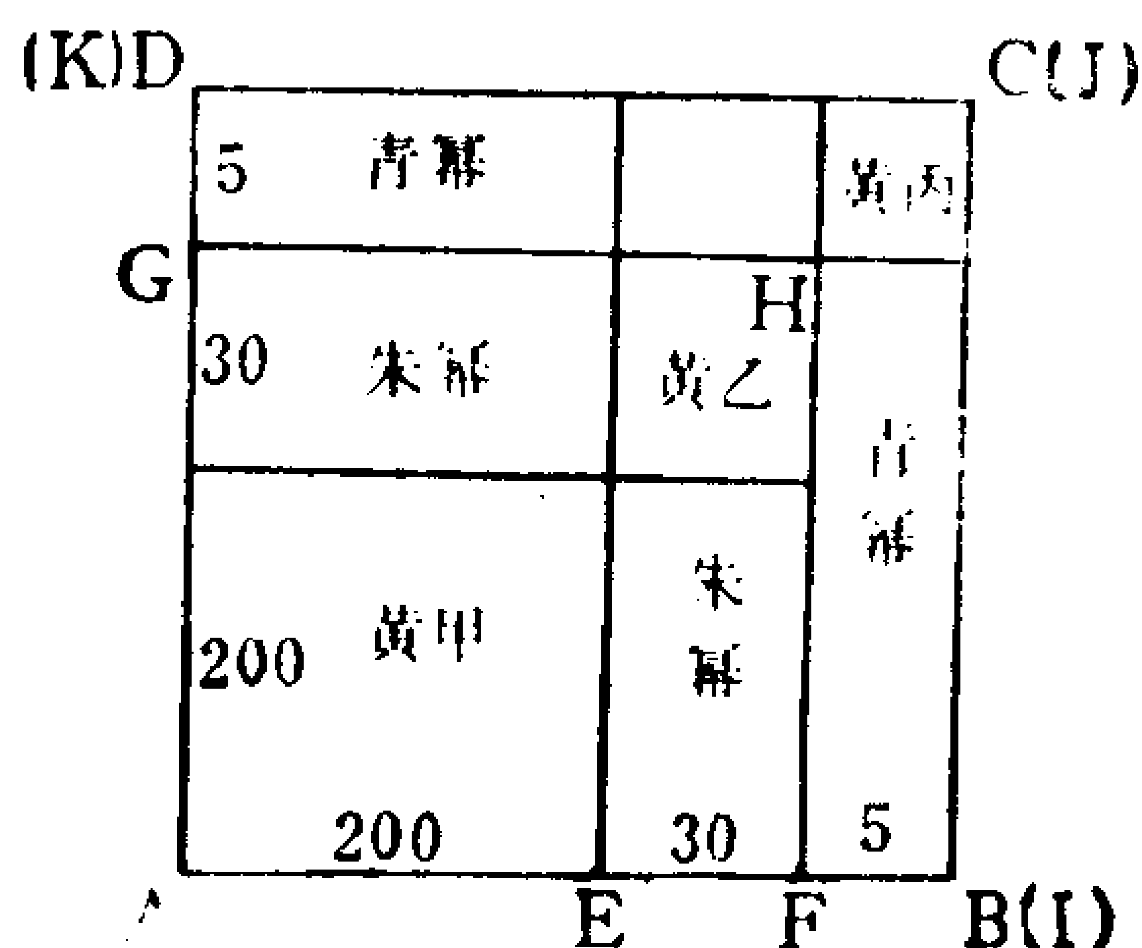


图3.3

以"少广"章第12题求55225的平方根为例。此时正方形$ABCD$的面积为55225，求AB的长。由于当时已采用十进位值制记数法。AB应是一个百位数，所以求AB长的方法就是依次求出百位数、十位数和个位数。按前述，先估计百位数字为2，因而在AB上截$AE=200$，作正方形(以AE为边)即为"黄甲"，它的边AE的两倍称为"定法"。在$ABCD$中除去黄甲，剩余的曲尺形面积为$55225-200^2=15225$。再估计十位数字为3，在EB上取F使$EF=30$，补成正方形$AFHG$，由黄甲变成$AFHG$增加上矩形"朱幂"2个，正方形"黄乙" 1个，它们的面积分别是$2\times200\times30$，30^2，从$ABCD$中除去$AFHG$，所余曲尺形面积为

$$15225-(2\times30\times200+900)=2325。$$

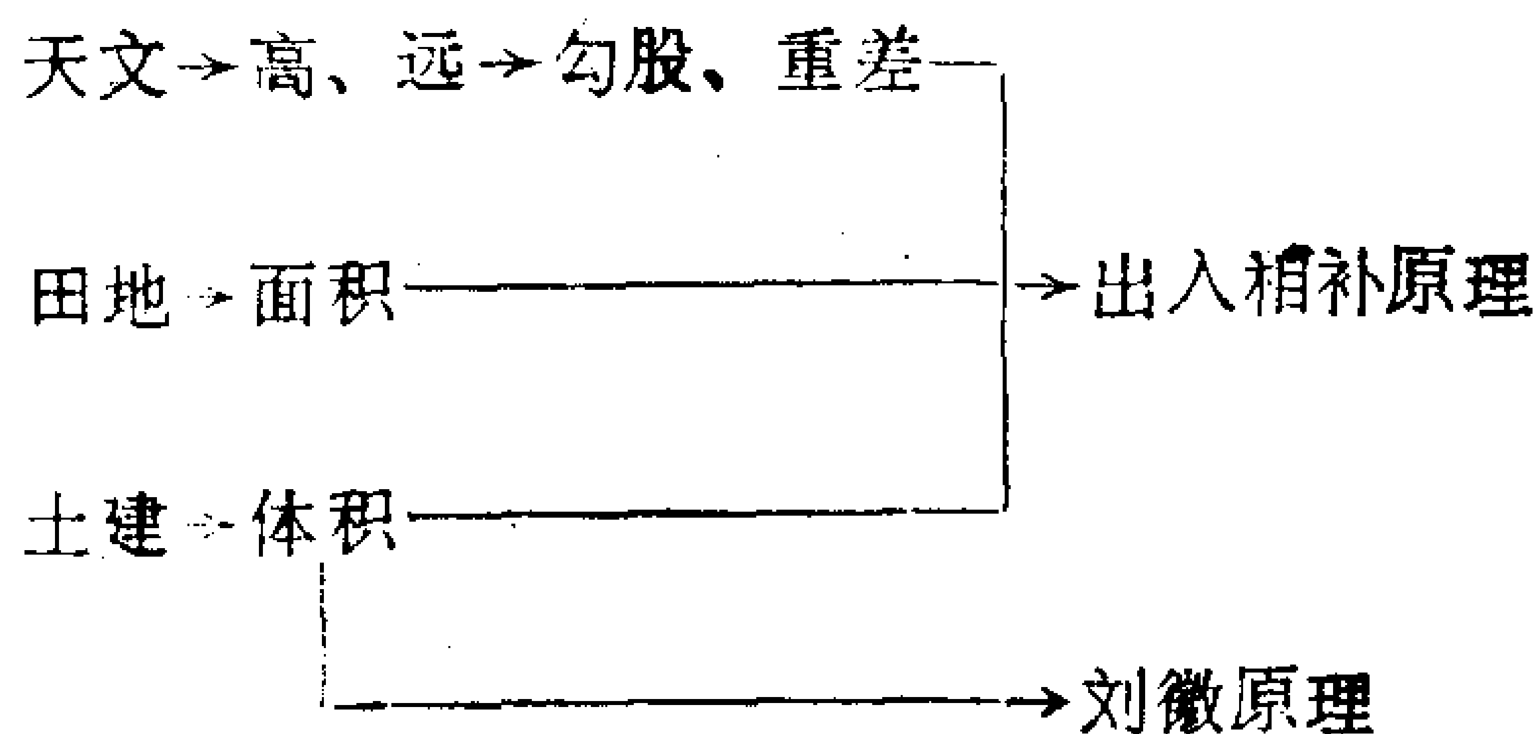
再估计个位数是5，在FB上取I使$FI=5$，并补作正方形$AIJK$，从$ABCD$中除去$AIJK$则要由上次所余积2325中除去新补出来的曲尺形：二"青幂"与一"黄丙"，所余为

$$2325-(2\times5\times230+5^2)=0$$

即B与I重合，这就得出55225的平方根是235。

出入相补原理可以说贯穿在刘徽的整个《九章算术注》中，它反映了当时人们已具有了较高的抽象概括能力，抽象概括出解决实际问题的一般原理，而这种一般原理又具有简明性和较强的直观性，用它能帮助人们把许多算法联系起来并得出更多的有效算法，已证实，刘徽的《海岛算经》的10个术，可以说都是采用出入相补原理得到的[①]。因此，实质上，出入相补原理的提出，反映了刘徽对于中国古代传统的数学思想做了大的发展。

刘徽的"出入相补原理"是有它的历史渊源的，它的来源大致如下[②]：



计算田地面积和修城、开河、兴修其他水利工程的计算和天文测量等社会实践问题正是产生出入相补原理的根源。《周髀算经》和《九章算术》则可看作是中间的理论过渡。出入相补原理也是中国古代数学实用思想的重要成果之一。它反过来在实践中得到广泛的应用，并为许多算法提供了依据。实用也是刘徽的重要数学思想，他说过利用数学可以"建历纪、

① 吴文俊：《"九章算术"与刘徽》，第60页。

② 吴文俊：《出入相补原理》，载《中国古代的科技成就》，中国青年出版社，第100页。

协律吕”即把数学应用于社会生活的各个领域。

利用出入相补原理，可以实现图形的互相转化，例如三角形和矩形，还可以实现数与形的互相转化，如勾股数和正方形面积的转化，方根和正方形边长的转化等等。这些转化包含了朴素的辩证思想。这也是中国古代数学思想方法的一大特色。

4.“割圆术”中的极限思想方法

“割圆术”是刘徽为“方田章”第32题的“圆田术”作注时引入的，用来求圆面积及推算圆周率。刘徽说：“按半周为从，半径为广，故广从相乘为积步也。假令圆径二尺，圆中容六觚之一面，与圆径之半，其数均等。合经率一而外周率三也。又按为图，以六觚之一面乘半径，因而三之，得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚一面乘半径，因而六之，则得二十四觚之幂。割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。觚面之外，犹有余径。以面乘余径，则幂出弧表。若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径。表无余径，则幂不外出矣。以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂。”我们以现代语言作些解释。

刘徽的结论是，把圆半径看作宽，把圆的半周看作长，圆面积就与有相应宽长的矩形等积。

他以圆内接正多边形(觚)来证明这个命题。从圆内接正六边形(“圆中容六觚”)开始，把圆内接正六边形的一边(a_6)乘以半径(r)，三倍起来就得圆内接正十二边形的面积($S_{12}=3a_6r$)。由圆内接正六边形得出圆内接正十二边形，称之为“割”(边数倍增)。如果我们把正n边形的周长记为P_n，则$S_{12}=3a_6r=\frac{P_6}{2}r$。其推证见图3.5，筝形$AOBC$面积=

$\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}a_6\ r$，圆内接正十二边形面积$S_{12}$等于筝形面积的6倍，有

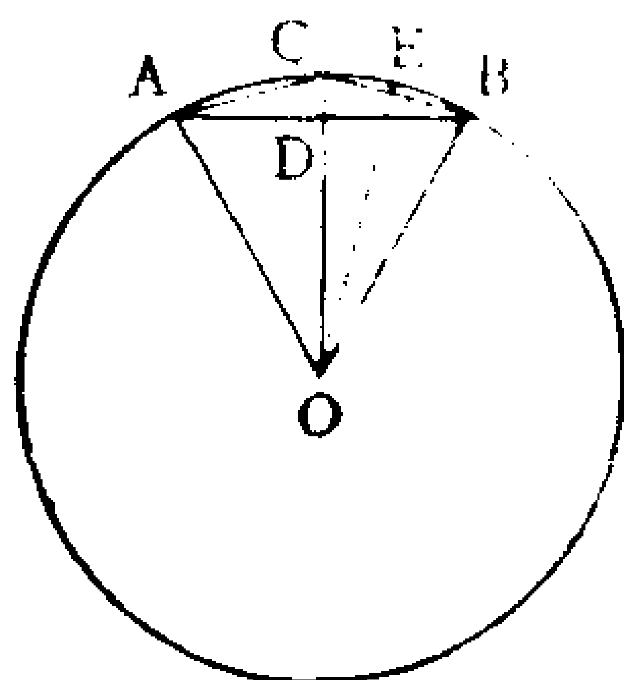


图3.5

$$S_{12}=6\times(\frac{1}{2}a_6\ r)$$

按此法再割圆，得$S_{24}=6a_{12}r=12(\frac{1}{2}a_{12}r)$，以此类推，有

$$S_{2m}=m\cdot\frac{a_m}{2}\ r$$

这里m是6的倍数，即$m=3\cdot 2^{n-1}$。

这样先把圆周分成6等分得圆内接正六边形，"割"一次，使边数倍增，得正十二边形，再割一次，得圆内接正二十四边形，照这样不断割下去，得到的圆内接正多边形的边长及所对应的弧就越来越短，此即"割之弥细"。

若不断割下去，边数不断增加，则圆内接正多边形的面积与圆面积的差就越来越小，此即"所失弥少"。

按这种方法不断割下去，当割的次数无限增加时("割之又割，以至于不可割")，圆内接正多边形的面积有一个极限，即圆的面积，此时就使圆内接正多边形"与圆合体而无所失矣"。表现为一个真正的极限过程：

$$\lim_{n\to\infty}|S_{3\cdot2^n}-S|=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}S_{3\cdot2^n}=S \qquad (S\text{为圆的面积})$$

用圆的内接正多边和圆来比较，它们之间在面积上的差别，就是有“余径”，指的是圆半径与圆内接正多边形边心距之差。如图3.6，CD为余径，以CD为宽，边长AB为长的矩形$ABFE$有一部分将落在圆外（这立刻就可得出“径一周三”的古率是不精确的，因为圆内接正六边形的边长为半径长，如取$\pi=3$，则圆周长只等于内接正六边形的周长）。但当正多边形边数无限倍增，即割之弥细而与圆合体时，就没有余径了（此时圆半径与内接正多边形的边心距相等）。既然正多边形外无“余径”，则其图形不能落于圆外，其面积也就不会大于圆面积。

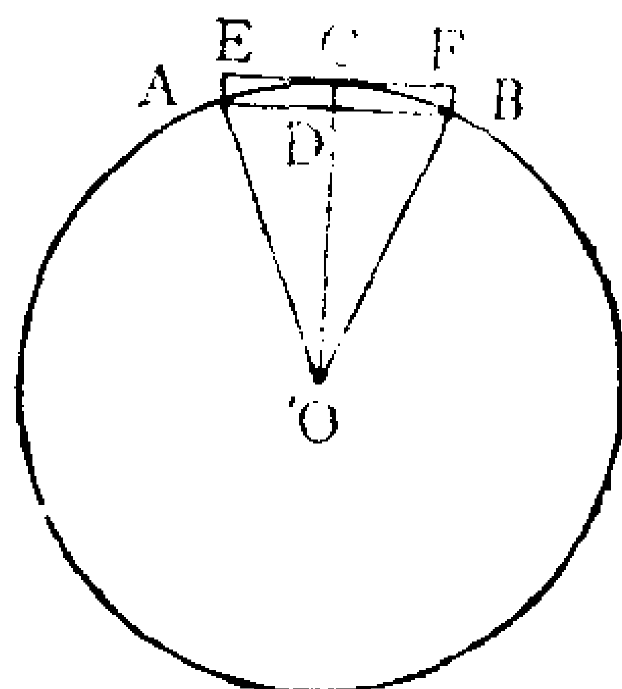


图3.6

然后以圆内接正多边形的边长和圆半径的积表示正多边形的面积，并对其进行“割”，使边数成倍增加，得到的面积如前述：

$$S_{12}=6\cdot\frac{a_6}{2}\cdot r$$

$$S_{24}=12\cdot\frac{a_{12}}{2}\cdot r$$

……

$$S_{3\cdot2^n}=3\cdot2^{n-1}\cdot\frac{a_{3\cdot2^{n-1}}}{2}\cdot r$$

其中$3\cdot2^{n-1}\cdot a_{3\cdot2^{n-1}}=P_{3\cdot2^{n-1}}$，即

$$S_{3\cdot 2^n}=\frac{1}{2}P_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r$$

当边数无限增多时

$$\lim_{n\to\infty}S_{3\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}P_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r\right)=\frac{1}{2}P\cdot r=S$$

得出“半周乘半径而为圆幂”的结论。

刘徽根据上述思想方法求出圆内接正192边形的面积(半径为1尺) $S_{192}=3.14\frac{64}{625}$，相当于求得 $\pi=3.14124$。他在实际上采用了 $\pi=\frac{157}{50}=3.14$。据研究，刘徽还继续求到圆内接正3072边形的面积，验证了前面的结果，求出的圆周率为

$$\pi=\frac{3927}{1250}=3.1416$$①

这里，刘徽运用了极限观念，反映了他的辩证思想。刘徽的《九章算术注》中包含了丰富的辩证思想。一方面是多次应用了极限观念，例如在弧田术、开方术、阳马术等中都用了极限观念，这与《墨经》和《庄子》中的极限思想是一脉相承的。另一方面，也是特别具有重要历史性意义的是，刘徽在世界上头一个把极限观念运用到数学中，并以之成功地解决了一系列重要的数学课题。与他的“正负术”、“出入相补原理”等相联系，充分反映了刘徽的杰出的辩证思想。

① 何绍庚：《割圆术和圆周率》，载《中国科技成就》，第103页。

5. “勾股圆方图”是数形结合思想的重大成就

“勾股圆方图”是赵爽的创造。赵爽，生平不详，可能是三国时人，他传世的著作是《周髀算经注》。其中最重要的成就是“勾股圆方图”及注。他用图形方法对勾股定理及一些相应的关于直角三角形的命题作了证明。

他这样证明勾股定理：“勾股各自乘，并之为弦实。开方除之，即弦。按弦图又可以勾、股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实。加差实一亦成弦实”。其意思就是：勾和股各自乘，然后两积相加成为弦的乘积（实），只要开平方就得到弦。按“弦图”（见图3.7），以勾、股

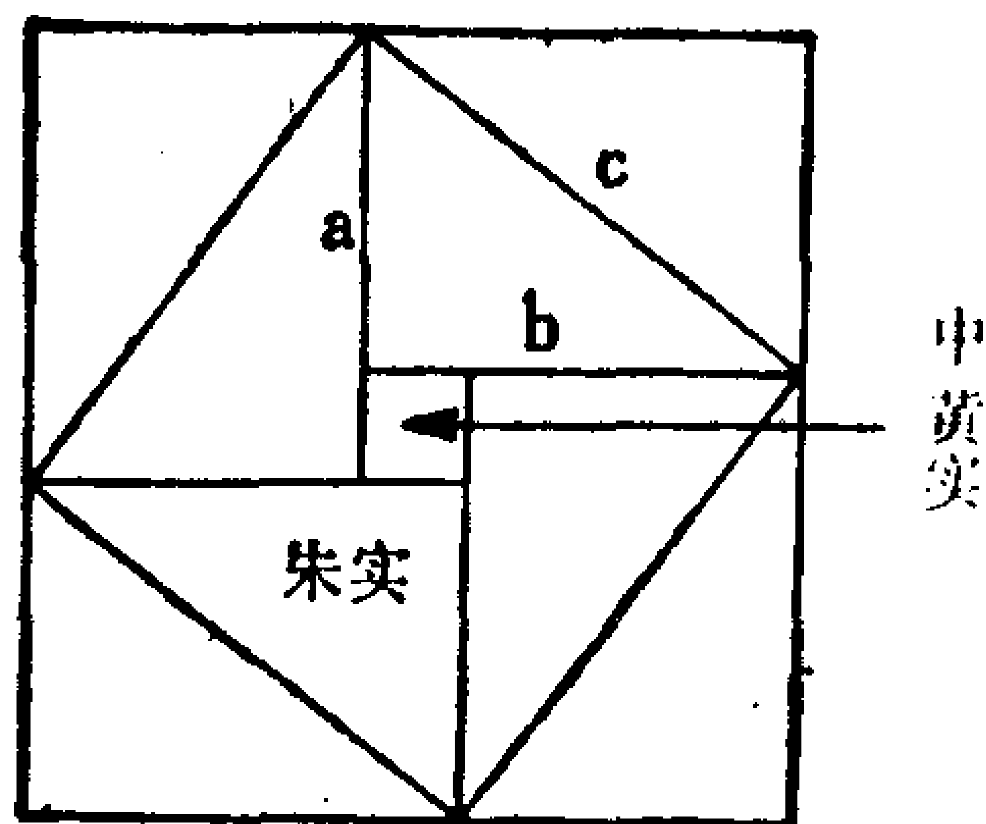


图3.7

相乘，其积表示为一个矩形，称为“朱实”，在图中用红色涂之。加倍就有四个红色的矩形。以勾股之差自乘，在图中表示为一个小正方形，用黄色涂之，称为“中黄实”。以两个朱实加上一个中黄实也得到弦实——弦的平方。用现代数学语言，结合图可把赵爽所说的表为下式：

$$2ab+(b-a)^2=c^2$$

化简，得

$$a^2+b^2=c^2$$

即勾股定理。

分析一下赵爽的原文，所谓勾、股、弦既指图形中直角三角形的边，又指表示边长的数；所谓“实”，既指图中的矩形或正方形，又指两数之积数。联系图来看可以作为证明，实际上给出的则是一个算法，例如头一句表述出一个我们今天把下述公式

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

展开为计算程序的一个算法。

在“勾股圆方图”中赵爽还用这种方式给出了关于直角三角形的其他一些命题一算法。例如一个已知勾弦差、弦股差，求勾、股、弦的命题：“两差相乘，倍而开之，所得，以股弦差增之，为勾。以勾弦差增之，为股，两差增之，为弦”。这实际上也是一个算法。用现代数学公式表示则是

$$a=\sqrt{2(c-b)(c-a)}+c-b$$

$$b=\sqrt{2(c-b)(c-a)}+c-a$$

$$c=\sqrt{2(c-b)(c-a)}+c-a+c-b$$

其所对应的弦图如图3.8。从弦图可以看出(在注文中并没有写出)：在弦方的左下割去勾方，右上割去股方，则甲$=(c-a)(c-b)$，乙$=(a+b-c)^2$，则c^2-2甲$=a^2+b^2-$乙(因割去勾方、股方时割去两次乙，所以余图中应补入一个乙，故右端减去一个乙)。又因$a^2+b^2=c^2$，所以2甲$=$乙（运用

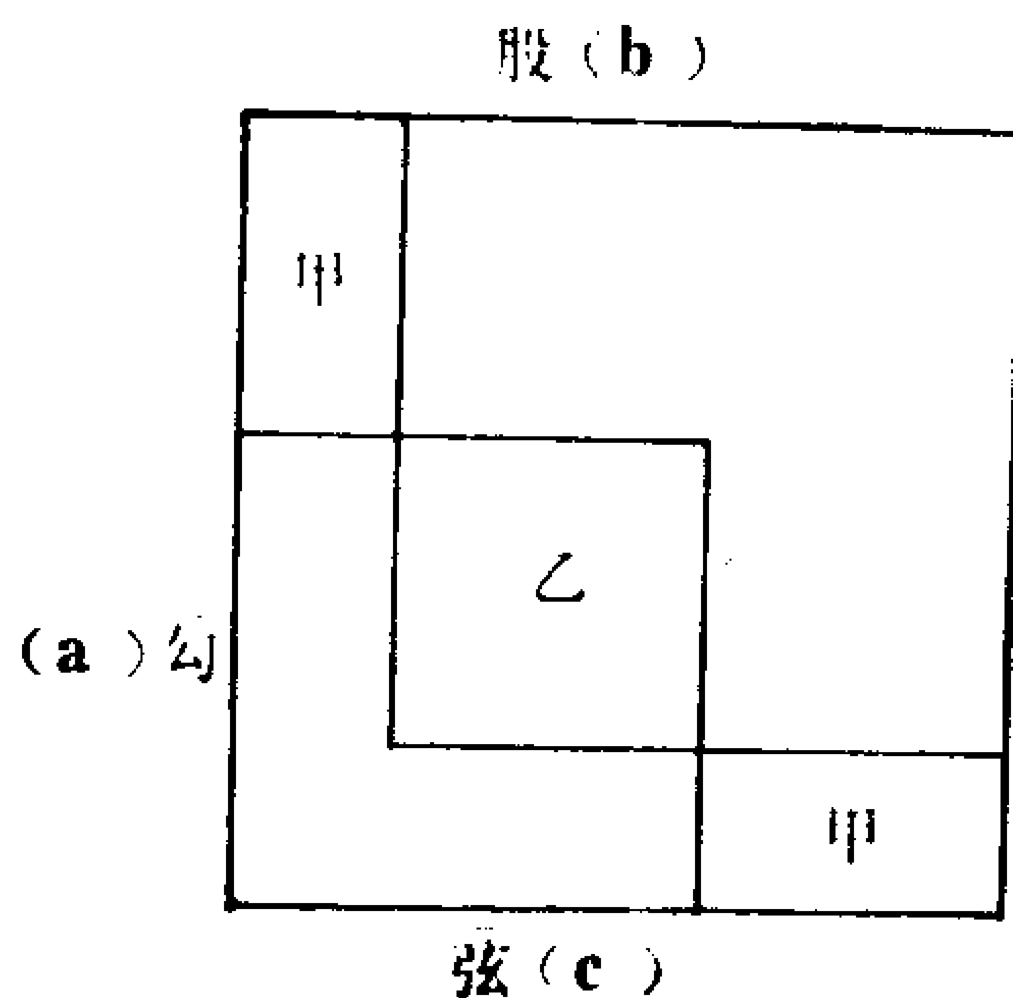


图3.8

了“出入相补原理”）故有

$$\sqrt{2(c-b)(c-a)}=a+b-c$$

由此推出上述三个式子（算法）。

赵爽引入命题——算法的方法称为“数形结合”的方法，在《九章算术》中已经使用了这种方法，如“方田”、“商功”、“勾股”等章的许多问题。刘徽也使用了“数形结合”的方法，他说自己“析理以辞，解体用图”，他注《九章算术》时也绘制了许多图，惜乎已佚。

这种数形结合的方法也反映了数学实用思想，数形结合便于人们迅速理解问题，便于应用数学的结果，图起了直观和示意的作用。数形结合的另一个重要特点是通过数的计算来解决关于形的问题，这也是《九章算术》所一再表示的特点——数学内容的算法化。赵爽也继承了这一点，他的成果，如“勾股圆方图”注中所给出的命题（约15个）都是用算法给出的，例如：“以差实减弦实，半其余，以差为从法，开方除之，复得勾矣。加差于勾，即股。”这是一个已知勾股差和弦，

求勾、股的算法：令 $k = b - a$，则勾 a 为二次方程

$$a^2 + ka - \frac{1}{2}(c^2 - k^2) = 0$$

的正根，$b = a + k$。

赵爽的"勾股圆方图"是《周髀算经》和《九章算术》中的勾股定理的证明和引申。他和刘徽一样，发展了数形结合的数学方法，这一点也反映了我国传统的数学辩证思想。

6. "祖率"独步千年

祖冲之(429—500年)，南朝宋、齐之间人，他在天文历法、机械及数学方面都有很高的成就。在天文历法方面，祖冲之编定《大明历》，采用了391年144闰的新闰法，与现代相比一个周期(391年)才差0.2248天，比原来的19年7闰法(200年差一天)精确得多。他算出的交点月(月球两次经过白道交升点的间隔)为27.21223日，与现代值相差不到1秒。算出木星周期为11.859年，与现代值仅有0.026%的误差。

在机械方面，他造过指南车、水碓磨、千里船，他还深通音律，注释过儒家经典。

他的上述大部分活动都与数学有密切的关系，他的数学著作《缀术》曾是唐代官定的数学教科书之一，可惜早已失传。现在所知的祖冲之的最著名的成就是在求圆周率方面。

(1)祖冲之求出

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

(2)圆周率的近似分数

$$密率：\pi=\frac{355}{113}，约率：\pi=\frac{22}{7}。$$

这两者都是具有世界历史意义的重大成果，其中密率是分母小于16604的一切分数中最接近π的分数，在西方，1000多年后的16世纪才得到这一结果。有8位精确数学的圆周率直到15世纪才为阿拉伯人阿尔·卡西(Al-Kāshī)所超过。为纪念祖冲之的重要贡献，现在人们把密率$\pi=\frac{355}{113}$称为“祖率”。

祖冲之在历法和机械等方面的成就都离不开数学的应用。他认为“天上日月星辰的运行快慢的规律，不是什么神怪的作用，它是有形体可供检验、有数据可以进行计算和推演的”(“迟疾之率，非出神怪，有形可验，有数可推”。)他充分肯定了数学在研究天文、编算历法和机械制造等方面的重要作用。他研究圆周率也与他研制标准量器的工作有关。①由此可见，实用思想，仍然是祖冲之的主要数学思想。

祖冲之及其子祖暅还有两项重要的数学成就。一是“开立圆术”，按刘徽提出的“牟合方盖”(在正方体内作两个互相垂直的、母线分别与正方体某两个面平行的内切圆柱得到的图形。象上下相对的两把方伞，故名。牟，相等；盖，伞)的方法深入研究，解决了计算球体积的方法：

$$V=\frac{\pi}{6}d^3 \qquad (d\text{为球直径})$$

二是提出“幂势既同，则积不容异”的重要原理。用现代语言

① 李迪：《中国数学史简编》，辽宁人民出版社，1985年，第114-115页。

来说，就是：界于二平行平面之间的两个立体，被任一平行于这二平面的平面所截，如果两个截面的面积常相等，则这两个立体的体积相等。这是现代初等立体几何中关于体积计算的一个重要原理，就称为"祖暅原理"。西方称之为"卡瓦列利原理"，是意大利数学家卡瓦列利（B.Cavalieri，1598—1647）于17世纪初再发现的，比祖氏父子晚1000多年。

7. 一行的插值法

一行（俗名张遂，公元683—727年）是唐代著名天文学家。他主持制订了《大衍历》，并且创造了"黄道游仪"和"水运浑象"等天文仪器。他还发动了一次大规模的测量工作，实际测出了地球子午线一度的长（公元724年），测得值为每度122.8公里，虽然不够精确（比现代值多11公里以上），但在1200年前能实测子午线之长（在世界上是第一次）确实是难能可贵的。

一行的主要数学成就是在历法编算中提出来的：创立了不等间距二次插值公式。

一行的成就充分反映了中国古代历法编算工作对数学的影响，可以说，天文历法的需要推动了数学的发展。《周髀算经》已开了先例，其后的数学工作也大都与历法编算有密切的联系。《周髀算经》提出一次插值法，《九章算术》的"盈不足术"也是一种一次插值法，在《周髀算经》中运用了一次插值法来计算各节气中午八尺杆子（"髀"）的日影长度（夏至和冬至除外，"二至"的日影长是实测的）。随着社会生产的发展，历法不断改善，南北朝时，人们提出太阳视运动的不均匀性并要把它引用到历法计算中去，首先，是刘焯（544—610年）在《皇极历》研制中创立了等间距二次插值法，后来，一行进一步创立了不等间距二次插值法，解决了历法编算的

问题，也促进了数学的发展。

一行继承和发扬了中国古代传统的实用思想，他利用数学来研究历法，来指导子午线长度的测量工作。另一方面，一行也深受《周易》思维模式的影响，在《大衍历》的编算中表现出浓厚的神秘主义思想，例如给一些天文数值附会上神秘的东西等等。

3.2 数学名著的思想方法

中国古代的数学著作是很多的，其目录可见于《二十四史》的有关志书中，但流传至今的却不多。最有名的、流传最广的首推《算经十书》。本节就《算经十书》中的几部著作来探讨当时人们的数学思想方法。现传本的《算经十书》是宋刻本，计包括《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张邱建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《缉古算经》和《夏候阳算经》等10种数学著作。其中前三种著作本书已有介绍，就后七种著作来说，它们在体系、内容和方法方面基本上都以《九章算术》为范本，继承并发展了《九章算术》的思想方法。

1.《孙子算经》是普及筹算的启蒙读物

《孙子算经》的作者和编写年代不详，估计是公元3—4世纪时的作品。

这部著作分三卷，卷上详尽讨论了度量衡的单位和筹算的制度及方法，我们在前章介绍的筹算制度及加减乘除的筹算法基本上就取自这本书。在这一点上可以说是对《九章算术》的一种补充，《九章算术》不是一部数学启蒙读物，因而它不讲数字计算规则及算筹用法，《孙子算经》补充了这一方

面，更有利于数学的普及，也有利于扩大数学的应用。

卷中和卷下共收集了64个问题，大多数属于日常生活中的应用问题，涉及粮食买卖、兑换、建筑、仓储、田亩测量计算，水利工程、分配、缉盗、输租、抽丁、棋局等方面，因而可以说是继承了《九章算术》的开放的归纳体系的思想，其中有关抽丁、缉盗、棋局等是《九章算术》所未涉及的领域。

书的内容也与《九章算术》相似，有问，每问有答，且每问都有“术”，术也是算法，全书共67个术。纵观全书，术也是主要内容，就是说，在内容方面，《孙子算经》也继承了《九章算术》。同时也采用了如同《九章算术》那样的模型方法和以算筹为基本的计算工具。

特别引起人们注意的是卷下第26题及其算法：

“今有物，不知其数。三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问物几何。答曰：二十三。术曰：三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十。并之，得二百三十三。以二百一十减之，即得。凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得。”

题意是：有一些东西，不知其数目。三个三个一数剩两个、五个五个一数剩三个、七个七个一数剩两个；也就是某数被3除余2，被5除余3，被7除余2。问这数是多少。

术的意思解释如下：设用3〔M〕表示3的倍数，5〔M〕表示5的倍数，等等。记70，21，15三个数，70是5与7的倍数，被3除余1；21是3与7的倍数，被5除余1；15是3与5的倍数，被7除余1，可用下式表示：

$$70 = 3[M] + 1 = 5[M] = 7[M]$$

$$21 = 3[M] = 5[M] + 1 = 7[M]$$

$$15 = 3[M] = 5[M] = 7[M] + 1$$

用题中给出的用3，5，7除的余数2，3，2分别乘上三式得：

$$140 = 3[M] + 2 = 5[M] = 7[M]$$

$$63 = 3[M] = 5[M] + 3 = 7[M]$$

$$30 = 3[M] = 5[M] = 7[M] + 2 \quad (+$$

$$233 = 3[M] + 2 = 5[M] + 3 = 7[M] + 2$$

最后一行是三式相加的结果。它表明233是3的倍数多2，5的倍数多3，7的倍数多2，正是所求的解。减去两次105（$= 3 \times 7 \times 5$），就得最小正解23。一般地说，只要用3、5、7除的余数r_1，r_2，r_3，分别乘70,21,15这三个数然后相加，便得所求答案。即

$$\begin{aligned} x &= 70r_1 + 21r_2 + 15r_3 \\ &= 3[M] + r_1 = 5[M] + r_2 = 7[M] + r_3 \end{aligned}$$

如这数大于105，就减去105，可重复减多次，即得最小答案。

这个问题是后来驰名于世界的"大衍求一术"的起源，由它发展出中国古代数学最有创造性的成就之一，下一节我们

再进一步探讨它。

这个"物不知数"的问题有其实用的背景，那就是历法编算中的一类问题：求上元积年。

中国古代历法编算有这样一个特点：为了推算每年的历谱，首先要定一个计算起点，叫做历元。最初设历元是推历的自然需要，例如《太初历》的历元定于元封七年(公元前104年)十一月初一日甲子日的夜半，因为根据当时的观测，认为这个时候正好是合朔和冬至，以此作为历元，就可以用朔望月、回归年的周期来推算以后的朔望和节气等等。

西汉末刘歆编制《三统历》，附会了不少神秘主义的东西(见前节)，为了表示自己的历法的神圣性，表示颁历的帝王能够"代天言事"，他把历元推到了一个理想时刻——不仅要求是一个甲子日的夜半，是朔及冬至，还要求正好是出现"日月合璧，五星联珠"天象的时刻，即日月的经纬度正好相同，五大行星又聚集在同一方位的时刻。这个时刻一般都在遥远的过去，称为上元，从上元到编历年份的年数叫积年，通称上元积年。

求上元积年要用到一次同余方程组，每个方程表示一个条件。如要求历元为甲子日夜半，朔旦及冬至，则要列出下述一次同余式组

$$\begin{cases} aN \equiv r_1 \pmod{60} & (1) \\ aN \equiv r_2 \pmod{b} & (2) \\ aN \equiv r_3 \pmod{c} & (3) \end{cases}$$

其中 a 为一回归年（太阳在天球上连续两次通过春分点所需要的时间间隔，现代数据为365.24220平太阳日）日数，b 为

一朔望月(月相变化的周期，现代值为29.53059平太阳日)，c 为一近点月时间（月球连续两次通过近地点的时间间隔，现代值为27.55455平太阳日)，单位都是天，N 是上元积年。aN 表示从上元起到编历年的冬至的全部时间(天)，因为干支纪日以60天为一周期，所以(1)式中以60为模，r_1 是编历年的冬至时刻到前面一个甲子夜半的时间。r_2 是编历年冬至离开11月平朔(据朔望月推算的朔)的时间，r_3 是编历年的冬至时刻离上一次月过近地点的时间间隔。

解这个同余式组就得到满足这三个条件的上元积年。若增加"日月合璧、五星联珠"的条件，就要再增加 7 个同余式才行。解一次同余式组正是历法编算的需要。"物不知数"题，可以看作是历法编算上求上元积年的实际问题的一种简化模型。

《孙子算经》也认为数与万物相关联，因而可以应用到各个方面，甚至应用于超自然的方面，卷下最后一题是一个典型的例子："今有孕妇行年二十九，难九月。未知所生。答曰：生男。术曰：置四十九，加难月，减行年。所余，以天除一，地除二，人除三，四时除四，五行除五，六律除六，七星除七，八风除八，九州除九。其不尽者，奇则为男，偶则为女。"

2. 《张邱建算经》是《九章算术》的续编

《张邱建算经》三卷，序后题"清河张邱建谨序"，大约是公元 5 世纪的作品。全书共收入92个问题，每题有答案，几乎每题都有 6 世纪人刘孝孙写的"草"，即按"术"本题应怎样作的具体作法。

《张邱建算经》继承并发展了《九章算术》的思想方法，例如，它是一个开放的归纳体系，包括了社会生产生活各方面

的问题，如围猎列阵，测量树高、河宽、城远等，行程，赐金，建筑、纺织、贸易、冶金、容积，租税、仓储，田亩计算等等。由于社会生活有了发展，所以与《九章算术》比较，应用领域也有了新的发展，如北魏天安元年(466年)设"九品混通制"，"因民贫富为租输三等九品"，20年后废除。《张邱建算经》卷中第13题就反映了这种"制"，实际上是执行这一制度的应用问题："今有率，户出绢三疋，依贫富欲以九等出之，令户各差除二丈。今有上上三十九户，上中二十四户，上下五十七户，中上三十一户，中中七十八户，中下四十三户，下上二十五户，下中七十六户，下下一十三户。问九等户，户应出绢几何"。就是按制度规定，每户平均应交实物税三疋绢，依贫富分九等交，每等之间差二丈，有各等户若干，问每户应交多少。

《张邱建算经》的主要内容也是"术"。书中所取得的几个主要成果，例如求最小公倍数，等差数列及不定方程等方面的成果，都是用"术"表达出来的。

如卷上第10题："今有封山周栈三百二十五里。甲、乙、丙三人同绕周栈行，甲日行一百五十里，乙日行一百二十里，丙日行九十里。问周行几何日会。答曰：十日、六分日之五。术曰：置甲、乙、丙行里数，求等数为法。以周栈里数为实。实如法而得一。"题意为：三个人以不同的速度绕山行走，什么时候相会。实际上就是求三人绕山一周的时间的最小公倍数。"术"说：求甲、乙、丙所行里数的最大公约数(等数)作为分母，以一周栈道的里数为分子，得到的数就是所求的会合时间。用现代数学符号表示为：

求三数$\frac{M}{a}$，$\frac{M}{b}$，$\frac{M}{c}$的最小公倍数，表示为$\frac{M}{d}$，则

$$\left[\frac{M}{a},\ \frac{M}{b},\ \frac{M}{c}\right]=\frac{M}{d}=\frac{M}{(a,b,c)}$$

这是一个十分先进的结果。

关于等差数列问题，《张邱建算经》提供的几个“术”相当于已有了按下述公式计算的程序：①

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

$$d=\frac{2\frac{S_n}{n}-2a_1}{n-1}$$

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

$n=2(m-a_1)+1$，　m为n项平均值。

《张邱建算经》中最著名的问题是卷下第38题——“百鸡问题”：

“今有鸡翁一，直钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，直钱一。凡百钱，买鸡百只。问鸡翁、母、雏各几何。”

设公鸡、母鸡、小鸡各买x、y、z只，则有

$$\begin{cases}5x+3y+\frac{1}{3}z=100\\ x+y+z=100\end{cases}$$

① 见《中国数学简史》，山东教育出版社，1986，第193-194页。

这是不定方程，《张邱建算经》给出3组答案：（4，18，78），（8，11，81），（12，4，84）。一问多答，是《张邱建算经》开创的。在不定方程研究中有重要的意义，后来多有研究"百鸡问题"的，它成为不定方程入门的一个重要例子。

中国古代的不定方程研究不是从《张邱建算经》开始的，《九章算术》的"方程"章第13题"五家共井"问题可以看作开端：

"今有五家共井，甲二绠（两根汲水用的绳子）不足，如乙一绠（甲两根绳子接起来，还差乙的一根绳子才够长）；乙三绠不足，如丙一绠；丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，如戊一绠；戊六绠不足，如甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮（到达水面，即够用）。问井深、绳长各几何。答曰：井深七丈二尺一寸。甲绠长二丈六尺五寸，乙绠长一丈九尺一寸，丙绠长一丈四尺八寸，丁绠长一丈二尺九寸，戊绠长七尺六寸。"

设甲、乙、丙、丁、戊各家绳子长x、y、z、u、v，井深h，则是一个不定方程组：

$$\begin{cases} 2x+y=h \\ 3y+z=h \\ 4z+u=h \\ 5u+v=h \\ 6v+x=h \end{cases}$$

可见，《张邱建算经》按《九章算术》的思想方法，引入并解决了当时新出现的实际问题，所以说它是后者的续编。

3.《五曹算经》是管理数学大全

《五曹算经》五卷，甄鸾（535—560年前后人，在北周做过官）著。也是一部结构为"问、答和术"的数学著作，这一点上，继承了《九章算术》开创的结构形式，而且主要内容也是"术"，即算法，取材方面也以《九章算术》为范本。

"曹"是"古代分科办事的官署"①。按《隋书·百官志》所载，南北朝以来，中央政府各部门，例如尚书省、国子寺，及"三公"、"三师"、"大司马"、"大将军"的公府中都设有曹。此外，地方行政部门也设曹，如"上上郡太守属官"有"西曹、户曹、金曹、租曹、兵曹、集曹等掾佐"，县也有这些曹属；各种部队里也设功曹、金曹、户曹、法曹、兵曹等"列曹"。总之，"曹"是中央及地方官署中分科业务的管理部门。

《五曹算经》的五卷是这样构成的：

第一卷"田曹"："生人之本，上用天道、下分地利，故田曹为首"，包括19个田亩计算的应用问题。

第二卷"兵曹"："既有田畴，必资人功，故兵曹次之"，包括12个关于抽丁，军事供应，战阵布列等的问题。

第三卷"集曹"："既有人众，必用食饮，故以集曹次之"，包括14个关于贸易的问题。

第四卷"仓曹"："众既会集，必务储蓄，故仓曹次之"，包括收租、运粮、储粮等的12个问题。

第五卷"金曹"："仓廪货币交质变易，故金曹次之"，收入有关税收、贸易的问题10个。

《五曹算经》采用的也是开放的归纳体系：它按所涉及问

① 《现代汉语词典》，商务印书馆，1982，第105页。

题的归属而不是数学本身的归属分类，并且是从各"曹"的官员的需要出发来收入问题的。充分体现了中国古代数学的实用思想，数学内容比较浅显，可以说是供办事人员使用的关于管理方面的数学实用手册。从《九章算术》按应用领域分类到《五曹算经》作为分科办事的"曹"属官员的实用手册，是开放体系的一个重要发展，也是数学实用思想的一大发展。

4.《五经算术》是经书数学名词手册

《五经算术》也是甄鸾所著，它表现出数学实用思想的另一个方面：以数学为儒家经典作注。书中对"周易"、《诗》、《书》、《周礼》、《仪礼》、《礼记》、《论语》、《左传》等经典及古人对它们的注解中有关数字或数学的地方加以计算或解释，尤其涉及历法、音律的地方。它为学习或传授经典的人提供参考，成为学习或教授儒家经典的实用参考书。

这部著作与《五曹算经》一样，是对《九章算术》的开放性归纳体系的一个推广：把数学应用于"经典"这样一个特定的领域。如果说《五曹算经》应用在社会生产、生活的实践方面，那么《五经算术》就是把数学应用于思想、理论等意识形态方面，这在世界古代史上，也是一种非常独特的书籍。

书中的一系列的注解也是以"术"或"法"即算法给出的，算法仍是《五经算术》的主要内容。例如"求十九年七闰法：置一年闰十日，以十九乘之，得一百九十日。又以八百二十七分，以十九年乘之，得一万五千七百一十三。以日法九百四十除之，得十六日，余六百七十三。以十六加上日，得二百六日。以二十九除之，得七月，余三日。以法九百四十乘之，得二千八百二十。以前分六百七十三加之，得三千四百九十三，以四百九十九命七月分之，适尽。是谓十九年得七闰月，月各二十九日、九百四十分日之四百九十

九。”这是按《四分历》求十九年七闰的具体算法。《四分历》一回归年为 $365\frac{1}{4}$ 日，一朔望月 $=29\frac{499}{940}$ 日。12个朔望月是 $354\frac{348}{940}$ 日，所以一年闰 $365\frac{1}{4}-354\frac{348}{940}=10\frac{827}{940}$ 日，19年共闰 $10\frac{827}{940}\times 19=206\frac{673}{940}$（日），因而闰 $206\frac{673}{940}\div 29\frac{499}{940}=7$（月），所以19年闰7月。“法”中以整数的加减乘除表示分数运算，这是使用算筹为工具的一个特点。

5.《缉古算经》发展了“商功”“少广”的思想

《缉古算经》是唐代王孝通所作，时间大约在公元630年左右，王孝通的事迹人们所知甚少。

《缉古算经》一共收集了20个题，第一题是历法中的计算问题：已知某年11月初一日合朔时间和夜半时日所在的赤道经度，求夜半时月所在的赤道经度。从第二题到第六题及第八题是土木工程中的土方体积问题。这一方面要依据工程的具体情况计算体积和长、宽、高的尺寸，另一方面则要从已知的某一部分工程的体积求这一部分的长、宽、高的尺寸。这一部分可以说是《缉古算经》要研究的主要问题。实际上，它们是隋唐之际大规模工程建设（如开运河、修宫殿）中提出来的实际问题。

王孝通的数学研究继承和发展了《九章算术》的“商功”章和“少广”章的思想方法。他说：“伏寻《九章》商功篇有平地役工受袤之术。至于上宽下狭，前高后卑，正经之内阙而不论。”表明他认为“商功”章中没有求上宽下窄、前高后低的土方体积的算法不能适应当时的土建工程的实际需要。所以他“昼思夜想”，终于找到了一种新的算法——“开带从立方

术”，实际上是一种解三次方程的算法。在《缉古算经》中列出要用三次方程求解的问题，列出要用的三次方程，并找到求解三次方程的算法，这是王孝通取得的一项具有世界历史意义的成就。

四 宋元时期的数学思想方法

宋元时期，中国古代数学发展到一个高峰，创造出许多光辉的具有世界历史意义的成就。例如高次方程的数值解法，一次同余式组的解法，二项式展开系数表，高阶等差数列的有关计算等等都在数学史上占有崇高的地位。宋元时期，也是大数学家辈出的时期，先后有贾宪、沈括、杨辉、秦九韶、李冶、朱世杰和郭守敬等人，在数学上做出了杰出的贡献。这一时期也涌现了大量的数学著作，呈现了百花争艳的繁荣景象，据不完全统计，仅两宋300年间，著名的数学著作就有54种之多①，金、元的数学著作还有相当的数量。一般地说，下述几种数学名著比较集中地反映了宋元数学的水平，也代表了宋元时期的主要数学思想②：

《数书九章》，秦九韶著，1247年。

《测圆海镜》，李冶著，1248年。

《益古演段》，李冶著，1259年。

《详解九章算法》，杨辉著，1261年。

《日用算法》，杨辉著，1274—1275年。

《算学启蒙》，朱世杰著，1299年。

《四元玉鉴》，朱世杰著，1303年。

总之，宋元时期，数学大家辈出，数学名著连篇，创世界纪录的数学成果不断涌现，可以说是中国古代数学思想方

① 李迪：《中国数学史简编》，第149-151页。

② 钱宝琮等：《宋元数学史论文集》，科学出版社，1985年，第1页。

法发展的黄金时代。

4.1 数学思想方法跃进的里程碑——《数书九章》

《数书九章》系南宋秦九韶所著，秦氏生活年代大约为1202—1261年，《数书九章》为他1247年的作品。书中收入81个应用问题，分为九类：

（1）大衍类。共有应用一次同余式组来解的应用问题9个，如“古历会积”（求古历（四分历）的甲子、气、朔会合的周期（纪）和按四分历法淳祐六年（1246年）的上元积年）。“推计土功”（四县合筑堤，物力各有差，按物力出人夫，先后完工，求堤长及四县各筑堤长）等。

（2）天时类。关于天文、历法和气象中的应用问题。如“治历演纪”（求开禧历的上元积年7848183年的推算方法），“推气治历”（推算嘉泰四年（1204年）甲子冬至时刻，并求回归年日数）、“天池测雨”（已知一盆（上口大，下口小）中接的雨水深度计算平地水深）等。

（3）田域类。关于田亩面积的计算问题。如“尖田求积”（求筝形田的面积）、“三斜求积”（已知锐角三角形田的三边长求田地面积）等。

（4）测望类。测量及计算问题，有测山高及其距观测者的距离（“望山高远”）、测河宽（“陡岸测水”）、测城宽及其距离（“表望方城”）等问题。

（5）赋役类。关于赋税徭役的计算问题。如“围田租亩”（已知总田亩数，三等田的租率及三等田的比例，求三等田亩数及各收多少租）、“均科绵税”（已知总户数、总绵税数，按

五等户收，各户应出多少）等。

（6）钱谷类。粮食买卖及囤积问题。如“算回运费”（水运粮食改地卸货的运费折算问题）、“囤积量容”（圆囤容量问题）等。

（7）营建类。土木建筑工程的数学问题。如筑城墙用材（“计定城筑”）、修石坝的用料用工（“计造石坝”）等问题。

（8）军旅类。关于军营、阵法、军需等的计算问题。如“计立方营”、“方变锐阵”（方阵变等腰三角形阵）、“计布圆阵”、“均赴徭役”等问题。

（9）市物类。贸易和利息的计算问题。

在解决上述应用问题的过程中，秦九韶取得了解一次同余式组、高次方程的数值解法、线性方程组解法等许多重大的数学成果。

1．开放的、归纳和演绎相结合的思想

由前引内容不难看出，《数书九章》也是一个开放的归纳体系，它的题目也遍及当时社会生活的各个领域。在分类上，也继承了《九章算术》的原则：以常用数学模型或社会生活的领域为依据进行分类。如第一类“大衍类”是以一个常用数学模型（以“大衍总数术”来表述，实际上，“大衍类”就是这个模型的名称），其余八类都是按社会生产或生活领域来划分的。

开放性的归纳体系作为数学的一种思想方法，是随社会生活的发展而不断发展着的。中国古代社会，由秦汉到宋代，虽然总的生产方式没有改变，总的社会思想也有其连续性，但生产面貌和社会生活都有了巨大的改变，例如，生产力有了相当程度的发展，社会生活有了更大的复杂性。因而《数书九章》所反映的社会生产和生活都远较《九章算术》所反映

的广阔，问题有了进一步的深入，数学思想方法也有了进一步的发展。作为这种进一步发展基础的则是对《九章算术》思想方法的继承。

《九章算术》的开放体系主要用以解决秦汉当时的社会生产、生活问题，《数书九章》继承了这一思想方法，最主要的也是解决宋代的生产生活中遇到的问题，这一点是非常明显的。

例如宋代人口有了较大的增长，1223年南宋人口已达2832万①，当时南宋实际控制的只有江南数省，所以增加耕地面积成为当务之急。《数书九章》中，"围田先计"、"围田租亩"等题是关于围湖造田的计算问题，"计地容民"求一段沙洲（新形成的沿海沙洲）所能容纳的人口问题，都反映了扩大耕地面积的社会实践，实际上正是这一些社会实践是这类问题的来源。

气象与农业生产有密切的关系，由秦汉到两宋，生产有了很大的发展，人们对气象和农业的关系的认识也不断深入，因此对气象十分重视，这种重视和研究气象的实践活动就产生了书中的"揆日究微"、"天池测雨"、"竹器验雪"等问题。

两宋时期外患严重，先后与辽、西夏、金等发生过战争，尤其与金的战争更是旷日持久，是终南宋之世的大事，所以军旅之事是宋代社会生活中的一种重要活动，这一活动中提出许多要运用数学来解决的问题，这就是"军旅类"的来源。

据史书记载，南宋时期的高利贷剥削是十分严重的。除了私人高利贷外，政府也发放高利贷。高利贷的计算问题也收到《数书九章》之中，如第18卷的"推求典本"题，已知本息

① 冯君实主编：《中国历史大事年表》，辽宁人民出版社，1984年，第414页。

和利率(月息二分二厘(22%)，是相当高的利率)求本金额，“推求本息”题是已知利率、本金，求利息数的。第12卷“累收库本”题是整贷零收，知本金、利率及每月还钱数，求几个月能还完本息。

宋代实行“铜禁”，严禁铜钱外流。在对外贸易中不准用铜钱，用什么来作为货币呢？第17卷“均货推本”题指出，商人用的本钱是金$258\frac{1}{3}$两、银2470两、盐钞304袋，度牒67道。后两种是宋代特有的，盐钞是在产盐地领盐的凭证，由于当时盐铁官营，所以有通用性，便可作为有价证券流通。至于度牒，本是官府发给出家的僧道人等的证书，持有度牒的人表示已“出家”，可以免除赋税和徭役。因此，也可以当作一种有证证券使用。这是宋代的特殊情况。这个题中还谈到“博买”(“博到”)，即政府按定价收购货物。反映了当时的“官商”，即商业由政府经营或控制的情况。

两宋都发行纸币，北宋叫“交子”，南宋称“会子”，开始时，发行纸币限量并规定使用年限(三年为“界”)到期可向政府指定的机构兑换新会子。后来纸币一再滥发，且不能兑现，使会子贬值，“折解轻赍”、“推知余数”、“算回运费”等题都涉及到这种情况。

根据社会生产、生活各方面的需要，研究它们提出的计算问题。就这一点来说，《数书九章》确实继承并发展了《九章算术》的开放性思想——解决社会生活各领域中的问题。因而，在某种程度上说，《数书九章》中的应用问题及其解，可以作为研究宋代社会生产、生活的参考资料。

但是，必须指出，《数书九章》在发展开放的归纳体系建构整个数学的传统思想方法的同时，也重视了演绎推理的思想方法。例如“大衍类”共收入涉及卜筮、天文、土建、纳税等

各方面的九个问题。问题虽然是应用性的，但求解的数学方法则是“大衍总数术”，为推出这个术，秦九韶规定了一整套专用的名词：“问数”，“定数”、“定母”、“衍母”、“衍数”、“奇数”、“乘率”、“用数”、“余数”、“总数”等，这些都是他引用的数学概念，它们之间是有着严格的逻辑关系的。利用这些概念，秦九韶进一步进行了逻辑推演，得出了“大衍总数术”。而这一个“术”就成为解这九个题的一个逻辑前提，后面具体地展开各题中的应用情况，这是一个一般到个别的过程，即一个演绎推理的过程。在这一术中，秦九韶对各种数进行了分类，如把问题分成四类（“格”），一是“元数”，即各问题都是正整数的数；一是“收数”，即问数中有小数的数；另两个分别为“通数”（问数中有分数）和“复数”（问数都是十的整数倍）。这种分类是依赖于对数的种属关系的演绎推理的，秦九韶进而指出了它们之间的转化，所依据的也是它们之间的逻辑演绎关系。总之，《数书九章》继承和发展了刘徽开创的数学演绎证明的思想方法，对《九章算术》的体系有所补充，为后来的数学发展开辟了新天地。

2．算法化与抽象化相结合的内容

《数书九章》分九类共81题，每题都有“问”、“答”、“术”及“草”。所谓“草”，就是把“术”应用于本题时的具体计算过程。许多题的“草”后还附有筹图，即算筹具体摆法的图示。与《九章算术》一样，这里的“术”是解决该类问题的一个算法，但由于书中引入了“草”对“算法”代入本题的具体数据，并用图来具体表示实现这一算法时筹的具体摆法，因而与以前的算书（例如《九章算术》）相比较，“术”就更加简练，也更加具有普遍性和抽象性了。

以《数书九章》的“三斜求积”题为例。“问：沙田一段，

有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里。里法三百步，欲知为田几何？答曰：田积三百一十五顷。”（有一块“沙田”，呈三角形，三边分别为13、14、15里。一里按300步计。问这块田的面积有多少顷。）“术曰：以少广求之。以小斜幂并大斜幂，减中斜幂，余半之。自乘于上。以小斜幂乘大斜幂，减上，余四约之为实。一为从隅，开平方，得积。”（以《九章算术》“少广”章介绍的开平方法来解此题。以最短边长的平方加最长边长的平方，再减第三边长的平方，结果除以2，再自乘。以最短边长的平方乘以最长边长的平方，得的积减去前面自乘的结果，差除以4，得的商作为方程的常数项。设方程的二次项系数为1，解这一二次方程，就得“沙田”面积。）这一个“术”相当于利用公式

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$$

展开得到的计算程序，其中a、b、c分别表示小、中、大斜。这个算法比较抽象，在后面的“草”里代入了数据13、14、15进行具体计算，是“术”的具体化。表现了抽象化和算法程序的结合。

作为《数书九章》的光辉成就之一的“大衍总数术”（解一次同余式组）也是如此。“大衍总数术”是《孙子算经》中“物不知数”题的发展和完善。它是“物不知数”问题的一般化。是解《数书九章》中“大衍类”问题的算法。“大衍类”问题，就是求一个正整数N，使N被A_1除余R_1，N被A_2除余R_2，……N被A_n除余R_n，其实就是求解一次同余式组

$$N\equiv R_i \pmod{A_i} \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1)$$

如果A_1，A_2，…，A_n两两互素，则下式中的$a_i = A_i$（$i = 1, 2, \cdots n$），否则，求出两两互素的数a_1，a_2，…，a_n，使$\prod_{i=1}^{n} a_i = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$，这叫求“定数”。即

$$(a_i, a_j) = 1 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j)，令$$

$$M = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$M_i = \frac{M}{a_i}$$

如果有$k_1, k_2, \cdots, k_n$，分别满足

$$k_i M_i \equiv 1 \pmod{a_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则一次同余式组

$$N \equiv R_i \pmod{a_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (2)$$

的最小正整数解是

$$N = \sum_{i=1}^{n} R_i k_i M_i - PM$$

这里P是适当的非负整数，使得$0 < N \leqslant M$。

秦九韶在“大衍总数术”中规定了一系列的专门术语，解释如下：

问数：（1）式中的诸A_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$

定数：（2）式中的诸a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$，其中

$$(a_i, a_j) = 1, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n; i \neq j)$$

衍母：$M = \prod_{i=1}^{n} a_i$

衍数：$M_i = \frac{M}{a_i}$，$i = 1, 2, \cdots, n$

奇数：g_i使$M_i = S_i a_i + g_i$，$0 \leqslant g_i < a_i$

($i = 1, 2, \cdots, n$；S_i为正整数)

乘率：k_i，是使$k_i g_i \equiv 1 \pmod{a_i}$成立的最小正整数，

$i = 1, 2, \cdots, n$，由“大衍求一术”求之

用数：$T_i = k_i M_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$

余数：R_i，$i = 1, 2, \cdots, n$

各总：$N_i = T_i R_i$

总数：$N^* = \sum_{i=1}^{n} N_i$

所求率数：$N = N^* - PM$，P为使$0 < N \leqslant M$成立的适当的正整数

这里定义了一系列的概念，利用它们进行逻辑推导得出抽象的结果，表现了抽象化和算法化的结合。

“大衍总数术”首先给出由问数求定数的算法，然后用“大衍求一术”来求乘率，乘率就是上节《孙子算经》的“物不知数”题中的70、21和15，即求使$k_i g_i \equiv 1 \pmod{a_i}$的$k_i$。下面解释“大衍求一术”的术文(表4.1)。

表4.1

术文	算式	解释
置奇右上，定居右下，立天元一于在上	天元1　奇数g 　　　　定数a	"术"是算法，即筹的摆法。如左图，对每一个定数a_i分别求k_i，所以不用下标，"天元1"即求现在的未知数系数(未知数)
先以右上除右下，所得商数，与左上一相生入左下	1　　g c_1　　r_1	先求$\frac{a}{g}=q_1$(商)$\cdots r_1$(余) ($r_1<g$) $a=gq_1+r_1$，r_1置右下(剩余) 再求$c_1=q_1\cdot 1=q_1$　置左下
然后乃以右行上下，以少除多，递互除之，所得商数，随即递互累乘，归左行上下	c_2　　r_2 c_1　　r_1	求$g=q_2\cdot r_1+r_2$　($r_2<r_1$) r_2置右上(以少除多，因$r_1<g$，所以以r_1除g。所余r_2置于原g位置) $c_2=q_2\cdot c_1+1$ "递互累乘"，即交叉相乘
	c_2　　r_2 c_3　　r_3	$r_1=q_3\cdot r_2+r_3$　($r_3<r_2$) $c_3=q_3\cdot c_2+c_1$ 以此类推
	c_{2k}　　r_{2k} c_{2k+1}　　r_{2k+1}	$r_{2k-1}=q_{2k+1}r_{2k}+r_{2k+1}$ $c_{2k+1}=q_{2k+1}c_{2k}+c_{2k-1}$

术 文	算 式	注 释
	c_{2i+1} r_{2i+1} c_{2i+2} r_{2i+2}	$r_{2i}=g_{2i+2}r_{2i-1}+r_{2i+2}$ $c_{2i+2}=g_{2i+2}c_{2i+1}+c_{2k}$
须使右上末后奇一而止。乃验左上所得，以为乘率。或奇数已见单一者，便为乘率	c_{2m} $r_{2m}=1$ c_{2m-1} r_{2m-1}	直到$r_{2m}=1$时计算结束，此时$c_{2m}=k$即为乘率，即$kg\equiv 1(\mathrm{mod}\,a)$当奇数$g$为1时，相应的乘率即为1，不必再求了，(因为实际上，用上法求，结果也得1)。$1\cdot1\equiv1(\mathrm{mod}\,a)$

得到乘率后再通过相当于我们前面引入问数、定数等的定义时给出的公式表述的算法求出衍母及各个衍数、用数，最后求出总数和所求率数，即求出所给的同余式组的解。

“大衍总数术”提供了一个十分典型的算法，它也完全符合我们前面所说的现代对算法的要求，利用这个算法，用算筹为工具就可以机械化地得出结果。这个“术”可用下页中的算法逻辑表示(图4.1)[②]。

其中多次运用了“循环程序”、包括“求定数”、求“乘率”等“子程序”(大衍求一术就是求乘率的子程序)。秦九韶的文字叙述是人工利用算筹的算法。如果把它译成现代算法语言程序，就可以用电子计算机求解。下面是一个用Algol 60语言

① 逻辑框图利用了李继闵同志的成果，见《秦九韶与“数书九章”》，北师大出版社，1986，214页。

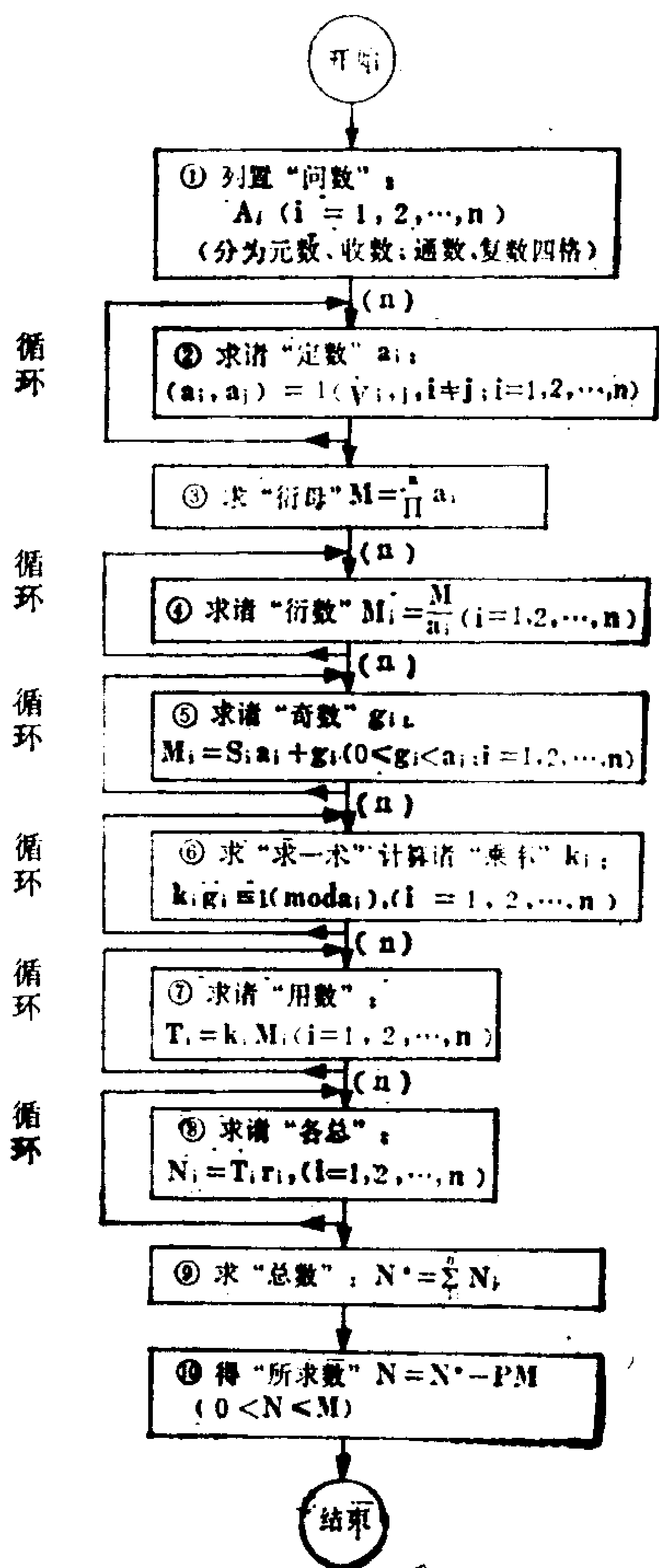


图4.1

表示的"大衍总数术"的算法①：

---

① 利用了莫绍揆同志的成果，《秦九韶与"数书九章"》，第187-188页。

设给定一次同余式组$x\equiv r_i \pmod{a_i}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，$(a,b)$指$a$、$b$的最大公约数。

```
for i:=1 step 1 until n do
for j:=i+1 step 1 until n do
begin d:=(a_i,a_j);
    if(a_i,a_j/d)=1 then a_j:=a_j/d else
    if(a_i/d,a_j)=1 then a_i:=a_i/d end j;
for j:=i+1 step 1 until n do
begin d:=(a_i,a_j); a_j:=a_j/d end j,i;
for i:=1 step 1 until n do
for j:=i+1 step 1 until n do
    while (a_i,a_j)>1 do
    begin d:=(a_i,a_j);a_i:=a_i/d;a_j:=a_j *d
                        end while,j,i;
                    (以上由问数求定数a_i)
M:=1;for i:=1 step 1 until n do M:=m*a_i;
for i:=1 step 1 until  n do
begin m_i:=M/a_i (m_i为第i个衍母)
g_i:=m_i; while g_i>a_i do g_i:=g_i-a_i;
                              (g_i为第i个奇数)
c_1:=0; c_2:=1; h_1:=a_i; h_2:=g_i;
while h_2>1 do
begin if h_1>h_2 the n h_1:=h_1-h_2; c_1:=c_1+c_2;
if h_2>h_1 then h_2:=h_2-h_1; c_2:=c_2+c_1 end while;
k_i:=c_2; (k_i为第i个乘率)
T_i:=k_i*m_i (T_i为第i个用数) end i;
```

$N:=0$; for $i:=1$ step 1 until n do

$N:=N+r_i*T_i$;

$N:=rs(N,M)$; (N为所求答数)。

《数书九章》中其他各种术也多具有转化为现代算法语言算法的可能。可见《数书九章》的主要成果是用“术”来表述的，即是以算法为主要内容的，这一点与《九章算术》一脉相承。另一方面，《数书九章》又重视抽象思维，在术中引用了特定的概念，从而使术的内容更加抽象，具有更普遍的性质。算法化与抽象化相结合，成为《数书九章》的重要特点之一。

《数书九章》内容抽象化的另一个方面是数学内容达到了高度的抽象，为此，应用了十分抽象的方法。例如“遥度圆城”题，虽然仍然利用实用的形式给出，利用算法方式求解，但却利用了一个十次方程，在当时的现实生活中没有要用这样高次方程的问题。为了表示所用的“正负开方术”能解任何次的方程，秦九韶是编出这个应用题的。这种编出实际上不存在的“应用”问题来，实质上是一种抽象方法。据研究，“遥度圆城”题可以用三次方程求解，秦氏为什么用了十次方程呢？这恰恰说明了一种抽象化的思想——他几乎是“抽象地”给出一个十次方程的，只是限于“应用体系”的正统思想，才表为一个应用问题的形式。

《数书九章》的“术”的特点是对每一个题目都先交待计算方法的依据，然后再给出具体的算法，并且往往把它们与《九章算术》联系起来，如“三斜求积”题“术”中的“以少广求之”。许多题都可找到这种渊源关系，例如与“少广”有关的14题，与“商功”章有关的13题，与“勾股”“重差”有关的10题，与“粟米”有关的11题等等，不过《数书九章》全面提高了《九章算

术》有关各章的算法，创造了封建社会数学思想方法的高峰。

3. 运算进一步机械化

《数书九章》的算法，与《九章算术》一样，都是以算筹为计算工具的算法，它规定算筹的"布列"、"运筹"方法。但由于《数书九章》引入了许多复杂的计算问题，常常需要多次地反复地运用各种方法布列算筹，为便于理解和掌握算法，秦九韶在大多数题目中都作了演草并绘制了筹图，对算筹的布列方法作了示范。所谓筹图就是把算筹的布列方法用图表示出来，按图运筹就可算出结果，实现计算方法的机械化过程。这在宋元时期已成定例。表 2.7 所列的"算筹摆法"就是一种简单的筹图。《九章算术》中没有列入筹图，《数书九章》大量采用筹图，说明问题高度复杂化。同时也说明《数书九章》的机械化计算较之《九章算术》有了较大的发展。

筹图进一步表明《数书九章》的"术"是使用算筹的算法。利用算筹，按算法进行布列，就能"机械"地得出结果，这是运用算筹进行计算的一大特点。在计算中，各种运算过程中的数量关系都是用筹的位置关系来表示的，因而在中国古代数学著作中，用不到数学运算符号，如加减乘除等符号，这也是中国古代数学中长期没有产生这些符号的一个原因。

《数书九章》采用的模型方法，也较《九章算术》有很大的发展，更加注意密切结合社会的实际需要，并且不只是从现实原型出发去创造相应的数学模型，而且在一些情况下，是为了阐述数学模型去创建现实"原型"。所以其数学模型更具有典型性。例如"大衍类"中既有筮卜问题，又有土建问题、天文问题、气象问题等等。数学模型法起着更重要的作用。

4.2 抽象化思想的发展

1. “开方作法本源”图是逻辑推理的产物

杨辉的《详解九章算法》(1261年)中载有公元11世纪人贾宪的“开方作法本源”图(见图4.2)。比杨辉稍后的朱世杰，在其名著《四元玉鉴》中也载有与“开方作法本源”图一样的“古法七乘方图”(见图4.3)，所谓“古法”，至迟也应是指贾

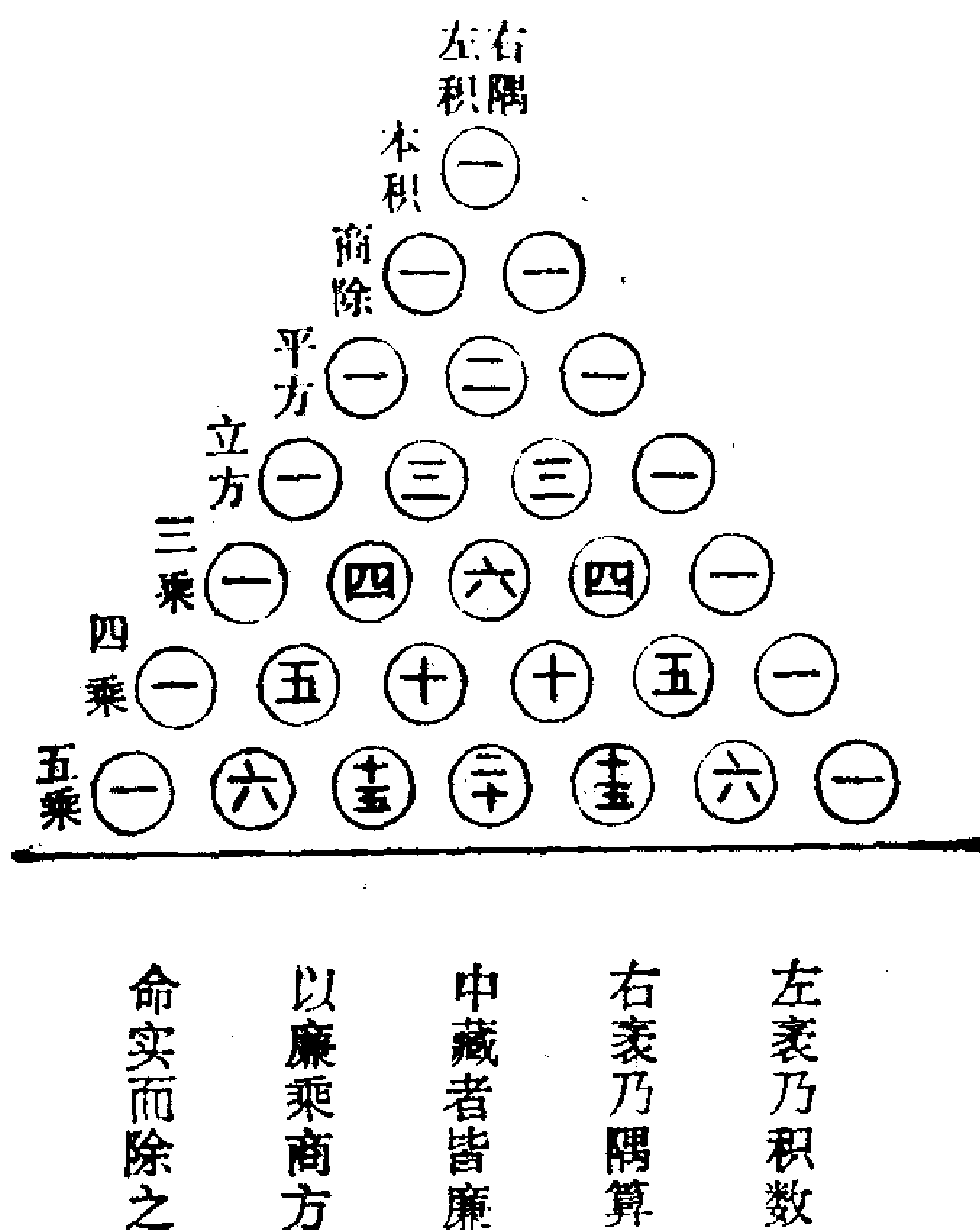


图4.2

宪之法。这两个图都是二项展开式的各项系数表，即

$$(x+a)^0=1$$

$$(x+a)^1=x+a$$

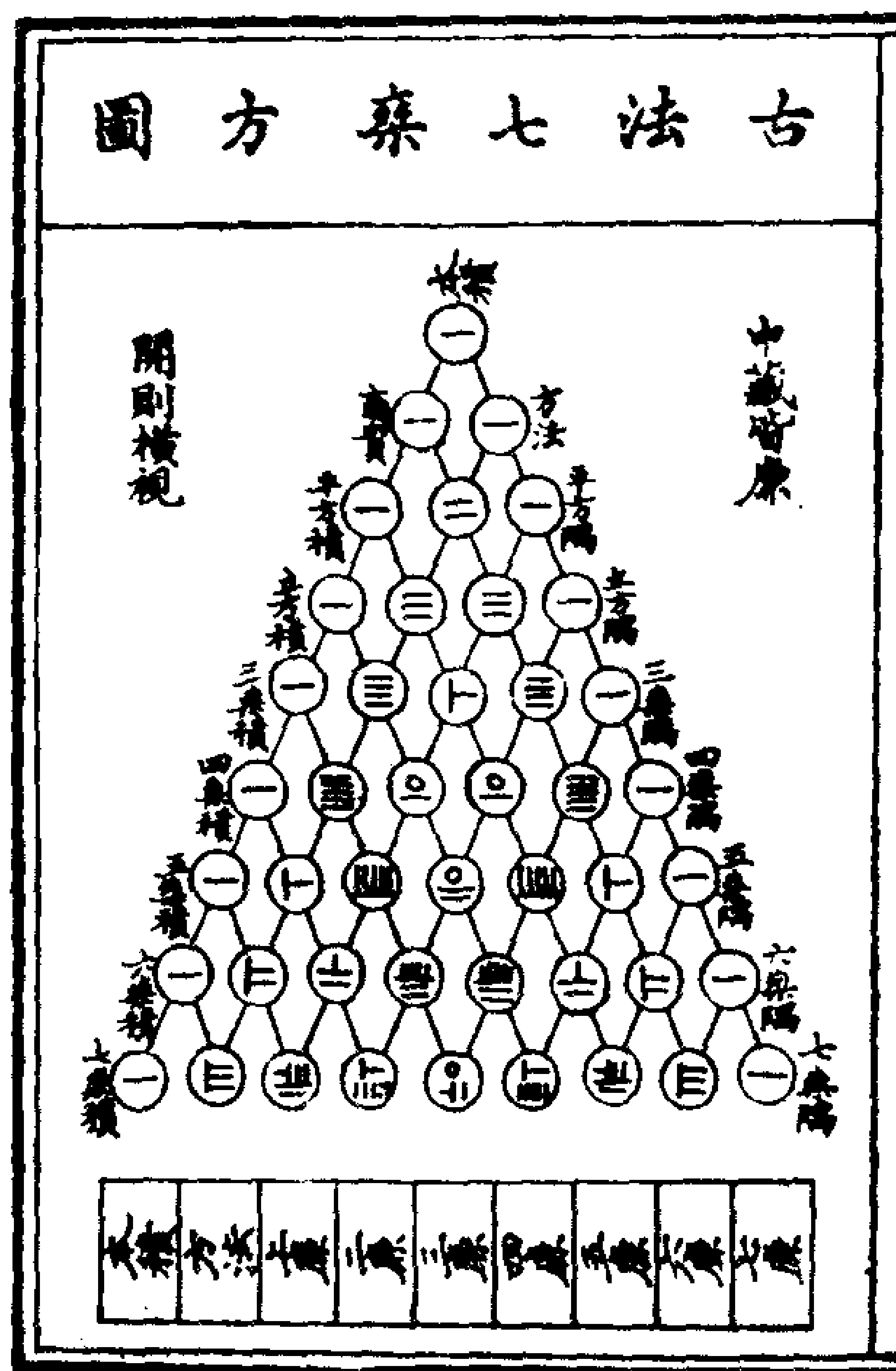


图4.3

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$$

$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2$$

$$+5a^4x+a^5$$

$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3$$

$$+15a^4x^2+6a^5x+a^6$$

利用图，还可以继续求下去，其规律是：表中间的每一个数都是它肩上两数之和。因此，实质上已能得到任意次数的二项式展开式。国外15世纪中亚数学家卡西(Al-kâshî)也曾给出二项式定理系数表。欧洲人阿皮纳斯(Apianus,1527)，斯蒂费尔(Stifel,1544)、塔尔塔利亚(Tartaglia,1556)、帕斯卡(Pascal,1654)等都研究过这种数表，西方称为"帕斯卡三角形"。但这些数学家都比贾宪晚许多年才获得这一成果。

"开方作法本源图"在数学中有许多重要应用。其中一个就是解高次方程，我国古代称为"开方法"，贾宪在此图的基础上，提出一种解形如$x^n=c$的高次方程的方法——"增乘开方法"，实际上可以解任意次的二项高次方程。

解高次方程的思想方法，可以说来自《九章算术》"少广"章的"开平方术"、"开立方术"、"开圆术"和"开立圆术"等。这里平方是面积、立方指体积，是由计算田地面积和土方体积而来的，就是说，有着社会生产、生活需要所提供的现实原型。由原型到模型是我国古代数学的一种典型方法，这也是我国古代数学开放性思想体系的一个特色。可是，这种思想方法，经过千余年的发展，到了宋代，发生了重大的变化。数学的发展不单纯依靠社会生产生活的实际需要，也不必须现实生活提供现实的原型，而是从数学本身的发展需要出发，运用抽象的逻辑思维，从"开平方术"关于土地面积的计算和"开立方术"关于土方体积的计算算法中引申出开四次方术、开五次方术、开六次方术以至开任意次方术等等。它超出了现实世界提供的二维平面和三维立体的现实原型，从已有的"开平方术"和"开立方术"出发，创造出一般的"开方作法本源"图，即是普遍的任意次方的二项展开式的各项系数

表，并依此创造出解任意次高次方程的“增乘开方法”，这是两项具有世界历史意义的伟大成就，而这两项成就的取得不能不说是抽象的思维方法的产物。

2. 《测圆海镜》是一部系统的逻辑推理的杰作

《测圆海镜》（1248年）是金代数学家李冶生平的得意之作。他临终时对其子说：“吾生平著述，死后尽可燔去，独《测圆海镜》一书，虽九九小数，吾尝精思致力于此，后世必有知者。”① 他自称《测圆海镜》是推衍洞渊“九容”之说。“九容”实与《九章算术》“勾股”章第16题有关，原题是“今有勾八步，股十五步，问勾中容圆径几何”。这可能是研究“容圆”（直角三角形的内切圆、旁切圆的有关问题）的起源。

《测圆海镜》全书12卷、共170题，都是关于已知直角三角形三边上各线段而求内切圆或旁切圆直径的问题，如书前“圆城图式”所示（图4.4）。在这本书里，李冶采用了系统的

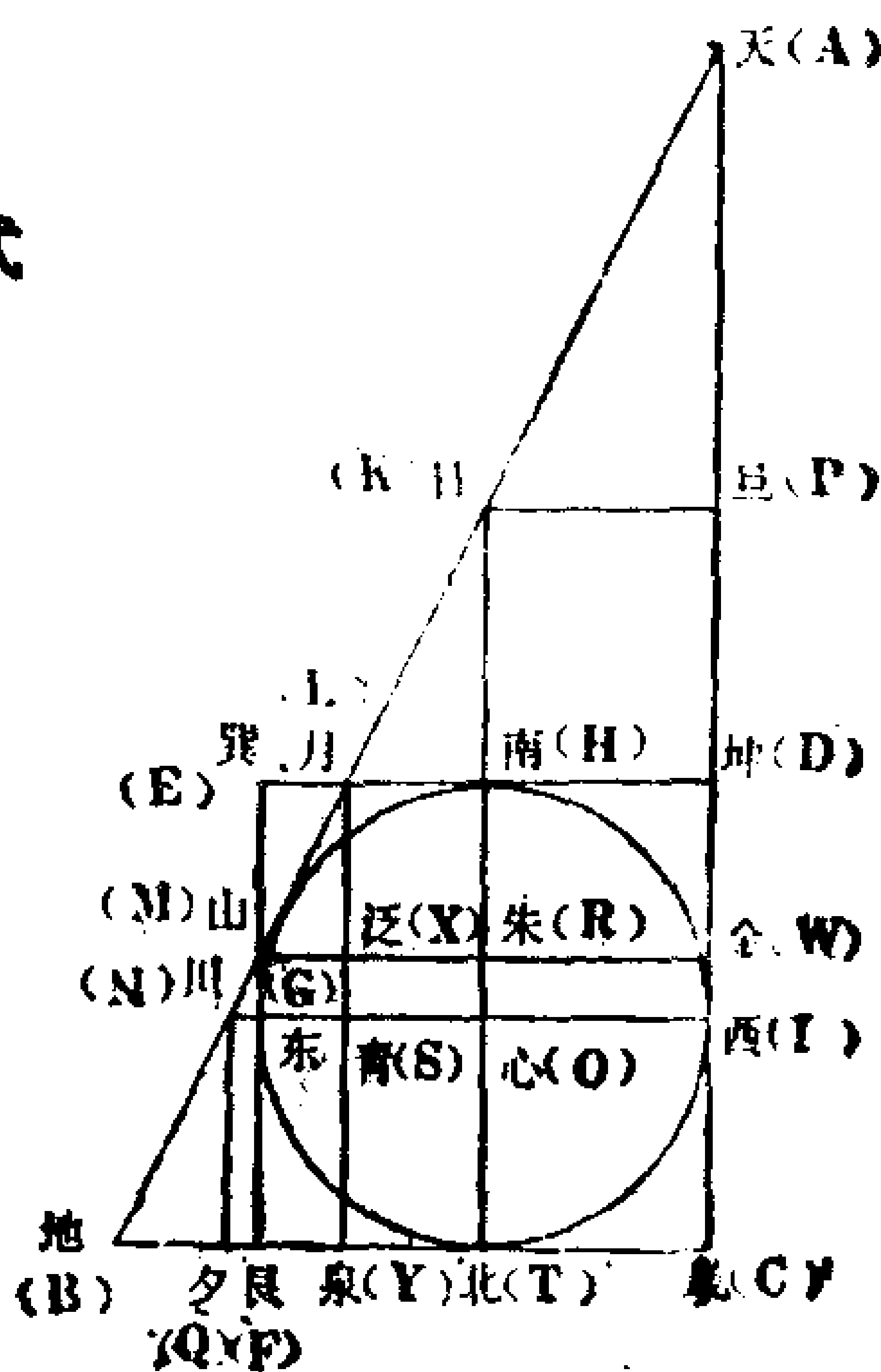


图4.4

① 引自梁宗巨《世界数学史简编》，第425页。

逻辑推理的思想方法。

首先，在开头的“总率名号”中李冶给出了后面要用到的各种概念的严格定义。例如“天之地为通弦，天之乾为通股，乾之地为通勾”（AB叫通弦、AC叫通股，BC叫通勾）、“天之日为上高弦”（AK叫上高弦）、“日之川为皇极弦”（KN叫皇极弦）等，后面各部分按定义结合图式来应用这些概念，就是说，本书中，首先是概念构成了一个体系。

其次，书中各种推理都是直接或间接依赖于勾股定理的，在定义时就已分别把每个有关直角三角形的三边分别称为勾、股和弦。在紧接着“总率名号”的“今问正数”部分，又利用勾股定理给出了各有关线段之长，给出了这样一些勾股数：(320,600,680)，(256,480,544)，(200,375,425)，(240,450,510)，(128,240,272)，(120,225,255)，(64,120,136)，(192,360,408)，(80,150,170)，(136,255,289)，(48,90,102)，(72,135,153)，(16,30,34)。在后面的几乎每题中都用到勾股定理，所以勾股定理对本书来说具有证明出发点的“公理”的意味，就是说，《测圆海镜》中的逻辑推理是有“起点”的。

紧接着“今问正数”部分的是“识别杂记”，它们表述了“图式”中各个线段之间的一些必然性的关系，例如“天之于日与日之于心同；心之于川与川之于地同”（如图4.4，$AK=KO$；$NO=NB$），相当于关于图4.4中各线段数量关系的命题，在后面的解题过程中，常要用到这些命题，并以此为依据进行推演，因而，这些命题相当于逻辑推理体系中的定理，可以在解题时应用。虽然在“识别杂记”中没有证明，但由勾股定理和“今问正数”不难推得这些定理，例如前一条识别杂记，由“今问正数”知“皇极股二百五十五($KO=255$)”，又

知"上高弦二百五十五($AK=255$)";"下平弦一百三十六($NB=136$)"、"皇极勾一百三十六($NO=136$)"。所以$KO=AK$,$NO=NB$。所以可以说,这些识别杂记是已经"证明"了的定理。识别杂记共分七类692条。就是说《测圆海镜》中公理、定理也构成了某种体系。

最后,从《测圆海镜》的选题来看,170道题,都是已知直角三角形的某些线段长,求其"容圆"(内切圆、旁切圆或圆心在某一边上而切于另两边的圆)直径的,问题采用了相同的问和答(问圆直径多少,答240步),只是由已知条件的不同而采取了不同的解法。这些问题虽然是以"应用问题"形式出现的,实际上却并不是从社会生产、生活的实际中得来的。如卷六第2题:"乙出东门南行三十步而立,甲从乾隅东行三百二十步,望乙与城参相直,问答同前。"(如图4.4,乙出东门由G处向南行30步至M处而立,甲从C处向东行320步至B处看见乙与圆城边缘在一直线上。问答同前面)不是现实生活中提出的问题,而是要引入由"识别杂记"推导出的算法而假设的问题。问题的解法与"识别杂记"(定理)有逻辑的关系,因此怎样假设题目不是实际生活的需要而是逻辑推演的需要,所以《测圆海镜》中实际上给出了一个系统的逻辑推理体系。

这种脱离了实际问题,重视逻辑推理的思想是宋元数学思想的新特点。李冶是其代表之一。李冶在《测圆海镜》的序里说:"故谓数为难穷,斯可;谓数为不可穷,斯不可。何则?彼其冥冥之中,故有昭昭者存。夫昭昭者其自然之数也,非自然之数其自然之理也。数一出于自然,吾欲以力强穷之,使隶首复生,亦未知如何也已。"李冶在这里正确地指出了,"数"是对客观存在("自然")的反映,它在纷杂不明

(“冥冥”)之中自有清晰的数学条理(“昭昭者”)可寻。这种数学条理就是“自然之理”的反映，他重视数学本身的逻辑发展，由此可见一斑了。

3. “天元术”、“四元术”的思想方法

方程论的主要问题有两个：一是方程的解的存在问题，一是求方程的解的问题。而为了利用方程解决实际问题或理论问题，就必然会遇到建立方程的问题。最简单的方程是一元一次方程，方程论的发展，一方面是变量增多，产生了线性方程组的(解的存在和求解)问题；另一方面是未知数次数增高，产生了一元高次方程的问题；两者相结合，又产生了多元高次方程组的有关问题。中国古代数学中系统地解决了这些问题，线性方程组的解的存在和求解问题在《九章算术》中就解决了，是通过“方程术”这一算法构造性地同时解决了解的存在和求解问题。宋代的“天元术”解决了建立方程的问题，“正负开方术”则以算法解决了一元高次方程的问题，“四元术”则解决了多元高次方程组的有关问题。可见，中国古人在13世纪就已建立了初具规模的、比较完整的独特的古典方程理论。

(1)“天元术”是一种普遍有效的建立方程的方法。《九章算术》中是通过类似现代的矩阵方法解决线性方程组问题的，其中用位置关系来表示不同的未知数(见第二章)。唐代王孝通创立“开带从平方法”和“开带从立方法”解决了三次方程的求解问题，但在筹算中没有表示出未知数，更无法显示出未知数的次数，全靠解方程的人去记忆，这是十分困难的事，并且容易出错，更不能表示出建立方程的一般方法，到了宋代，李冶在《益古演段》(1259年)中系统地论述了“天元术”的思想方法，解决了建立方程的问题。稍前，秦九韶在

《数书九章》中也提出"立天元一"表示未知数的方法。"天元术"的产生可能更早一些。据祖颐在《四元玉鉴》后序中称："平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石道信撰《钤经》、平水刘汝锴撰《如积释锁》，绛人元裕细草之，后人始知有天元也"。这些人大约都是12、13世纪时人，可见天元术产生于12、13世纪之际。李冶在《敬斋古今注》卷三中记有："予至东平得一算经，大概多明如积之术。以十九字识其上下层数曰：仙，明，霄，汉，垒，层，高，上，天，人，地，下，低，减，落，逝，泉，暗，鬼"。大概是以"人"表常数项，"人"(x^0)上九项为天(x)、上(x^2)、…、仙(x^9)，"人"下九项为地(x^{-1})、下(x^{-2})、…、鬼(x^{-9})等等，李冶改造了原来的"术"，采用了新记法，使"天元术"更加完善了。

李冶在《益古演段》中改用"太"表示常数项，用"元"表示一次未知数(x)项，在一个筹式中用"太"不用"元"，用"元"不用"太"。以标明"元"或"太"的项为标准，向上摆筹，每一行表高一次的未知数，如图 4.5 所示，译成现代数学语言就是

$$x^3 + 336x^2 + 4183x + 2488320 = 0$$

而如图4.6所示，译成现代数学语言就是

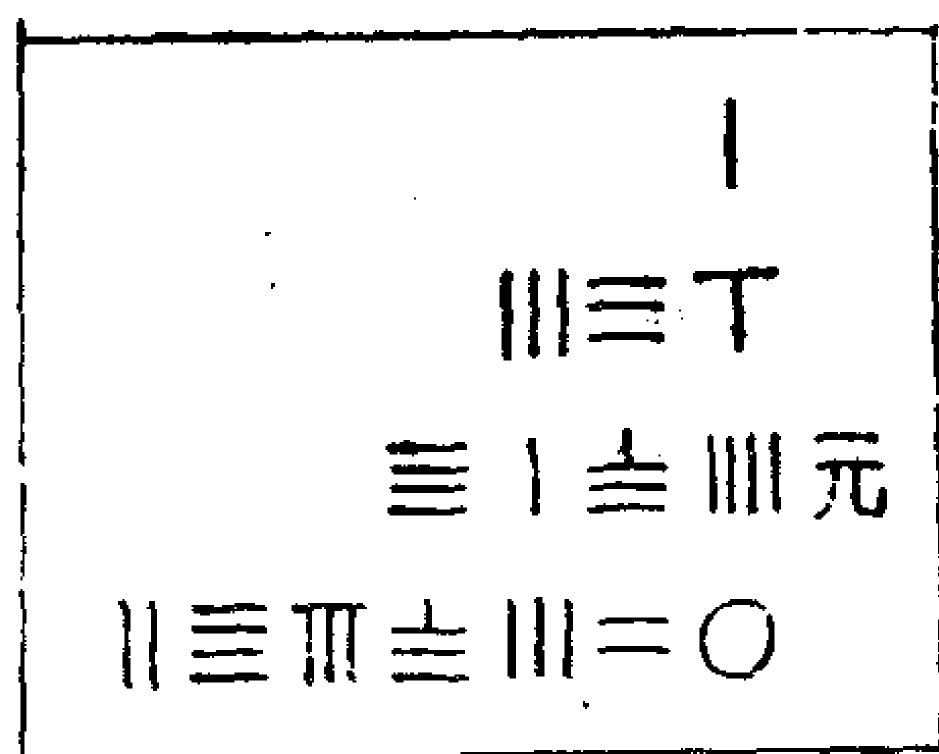


图4.5

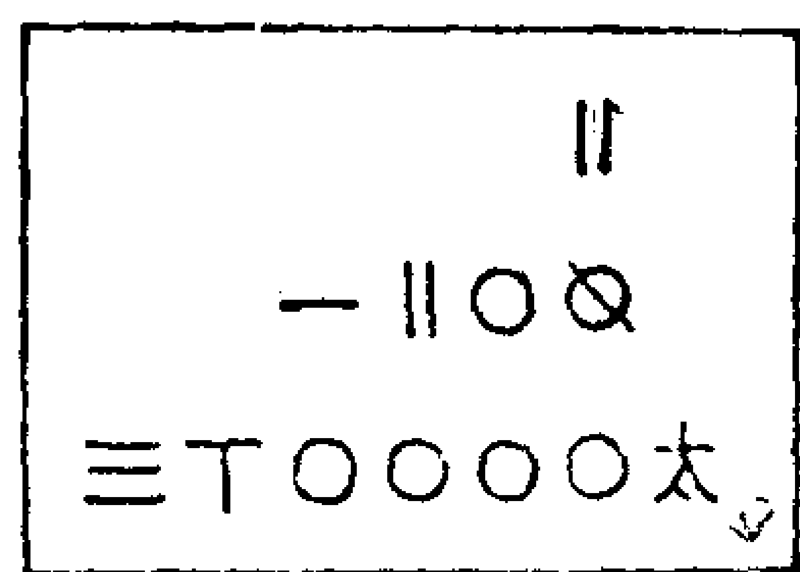


图4.6

$$2x^2-1200x+360000=0$$

注意打上斜划的数表示负数。所谓"立天元一为某某"可译作："设 x 为某数"。用特定的文字符号表示任意的未知数，并结合位置关系表示出未知数的任意次幂，这就完全解决了一般的代数方程的建立问题，这种方法具有抽象的普遍的意义。这与现代的列方程的思想方法是完全一致的。欧洲的数学家们，严格地说，直到16、17世纪才做到这一点[1]。"天元术"是中国古代数学具有独创性的成就之一。

（2）"正负开方术"解决了一元高次方程的解的存在和求解问题。它是由贾宪的"增乘开方术"发展而来的。贾宪的"增乘开方术"如前述，解决了形如 $x^n=A$ 的二项方程的求解问题。对一般高次方程的求解问题，首先是刘益（12世纪）在《议古根源》(已佚)中提出方法的。杨辉在《田亩比类乘除捷法》卷下引用了《议古根源》中的22个问题，其中有一个题为四次方程

$$-5x^4+52x^3+128x^2=4096$$

的求解问题。这是中国古代方程论的一个跃进。中国古人很早就解决了一般二次方程 $x^2+Ax=B$ $(A,B>0)$ 的求解问题，7世纪初王孝通解决了三次方程 $x^3+Ax^2+Bx=C$ $(A、B、C>0)$ 的求解问题。刘益已能解一般的代数方程，除常数项恒为正外其余各项系数正负都可，这是一项杰出的成就。

秦九韶发展了贾宪、刘益等人的成果，他在《数书九章》

① 钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，1961年，第172页。

中系统地阐述了一般高次方程的数值解法，他的表示高次方程的方法如图4.7所示，利用筹的位置表示未知数的次数，图4.7所示相当于现代的

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

他在《数书九章》的"遥度圆城"题中，建立并求解了10次方程

$$x^{10} + 15x^8 + 76x^6 - 864x^4 - 11664x^2 - 34992 = 0.$$

a	商
a_n	实
a_{n-1}	方
a_{n-2}	上廉
a_{n-3}	二廉
$\vdots$	各廉
a_1	下廉
a_0	隅

图4.7

与刘益的"正负开方术"一样，秦九韶的方法可以解任意次高次方程，求出其数值解。其解法与现代的霍纳法相近，而霍纳法是霍纳（Horner）本人在1819年发表的。秦九韶要早572年。在方程论问题上，贾宪、刘益、秦九韶等人表现出高度抽象的思维方法和高超的解题技巧，就其普遍性和构造性来说也是数学思想发展史上的光辉成就。

（3）"四元术"解决了四元高次方程组的求解问题，把中国古代独特的方程理论推向新的高度。与有力的是元代数学家朱世杰。他的名著《四元玉鉴》吸取了"天元术"的思想方法，参照了线性方程组的用算筹摆出的"矩阵"运算方法，创造出以"天"、"地"、"人"、"物"表示四个不同的未知数的四元高次方程组的数值解法。在计算时巧妙地运用了算筹的布列方法。《四元玉鉴》给出了布列算筹的筹图，在该书开头有"四象细草假令之图"，举了四个例子，分别说明一元方程、

二元方程（两仪化元）、三元方程（三才运元）和四元方程（四象会元）的布筹方法，其中四元方程的布筹方法为：规定"太"（表示常数项）放在筹图的中央，"天元"（未知数之一，可设为x）放在"太"的下方，从"太"向下依次为x、x^2，x^3，…项的系数；"太"的左边为"地元"（另一未知数，设为y），从"太"向左依次为y，y^2，y^3，…项的系数；"太"的右边为"人元"（第三个未知数，设为z），向右依次为z，z^2，z^3，…项系数；"太"的上边为"物元"（第四个未知数，设为w），向上依次为w，w^2，w^3，…项系数；其余的位置为不同未知数的乘积项系数。在筹图上未知数项的表示方法见图 4.8，当然在实际应用中不用未知数而只用其系数，利用位置表示未知数及其次数。如图 4.9 所示之筹图，表示现代记法的方程 $x^3+4xy+2x^2y+x^3y-2y^2-xy^2+3xz+8w=0$。不过这个筹图也可以表示一个多项式，到底是方程还是多项式，由书中的上下文来确定。

				⋮				
	y^3w^3	y^2w^3	yw^3	w^3	w^3z	w^3z^2	w^3z^3	
	y^3w^2	y^2w^2	yw^2	w^2	w^2z	w^2z^2	w^2z^3	
	y^3w	y^2w	yw	w	wz	wz^2	wz^3	
					yz			
…	y^3	y^2	y	太	z	z^2	z^3	…
			xw					
	xy^3	xy^2	xy	x	xz	xz^2	xz^3	
	x^2y^3	x^2y^2	x^2y	x^2	x^2z	x^2z^2	x^2z^3	
	x^3y^3	x^3y^2	x^3y	x^3	x^3z	x^3z^2	x^3z^3	
				⋮				

图4.8

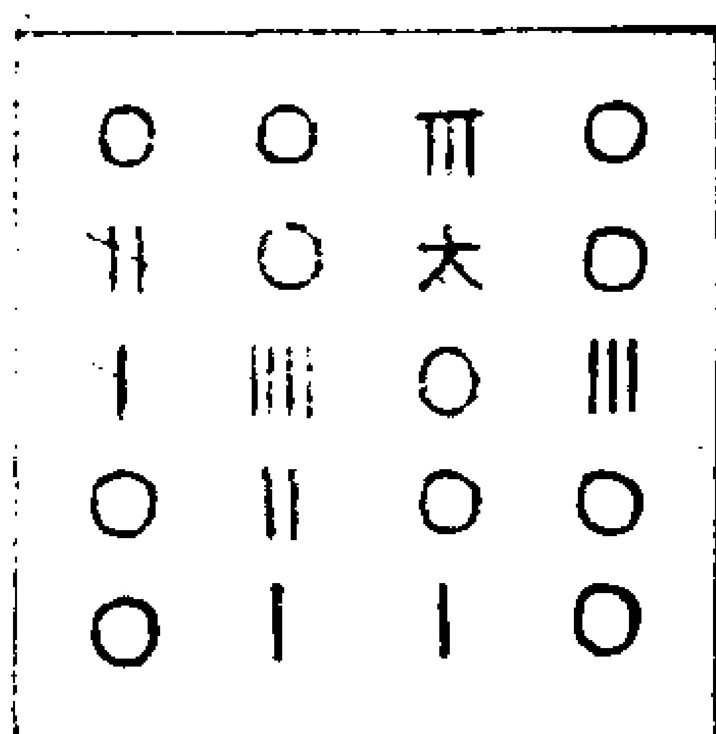


图4.9

这种筹图本身就是抽象思维的产物，以不同的文字表示不同的未知数意味着开始了向符号代数的转化，这包括了对数的抽象、对文字的抽象、对运算的抽象等一系列的抽象思维过程，表现了中国古代数学家高度的抽象思维能力。用不同的位置表示不同的未知数是《九章算术》就开始应用了的古老的数学思想方法，李冶、秦九韶等用不同位置表示不同的未知数的次数，朱世杰把两者结合起来，在一个筹图中利用位置关系表示出不同的未知数，以及它们的不同幂指数和不同的乘积项，这更是抽象思维与形象思维的一种巧妙的结合。直到18世纪，欧洲的数学家才开始用不同的符号表示不同的未知数，已晚了数百年。

“四元术”的具体求解过程也是抽象思维充分发展的产物，采用了十分抽象的思想方法和十分巧妙的技术。从现在的观点看，解多元高次方程组的关键就是消去法的问题，例如四元四次方程组求解的关键在于如何消去三个元，以便最后得出一个只含有一个未知数的高次方程，就可以用“开方术”来求解。“四元术”就成功地解决了这个问题，这是一项具有世界意义的成就，欧洲人在19世纪才建立了完整的消去理论，但他们所研究的是讨论消去的可能以及一般消去法的理论。在解决具体的多元高次方程组的解法方面，朱世杰的

“四元术”至今仍有一定的参考价值。

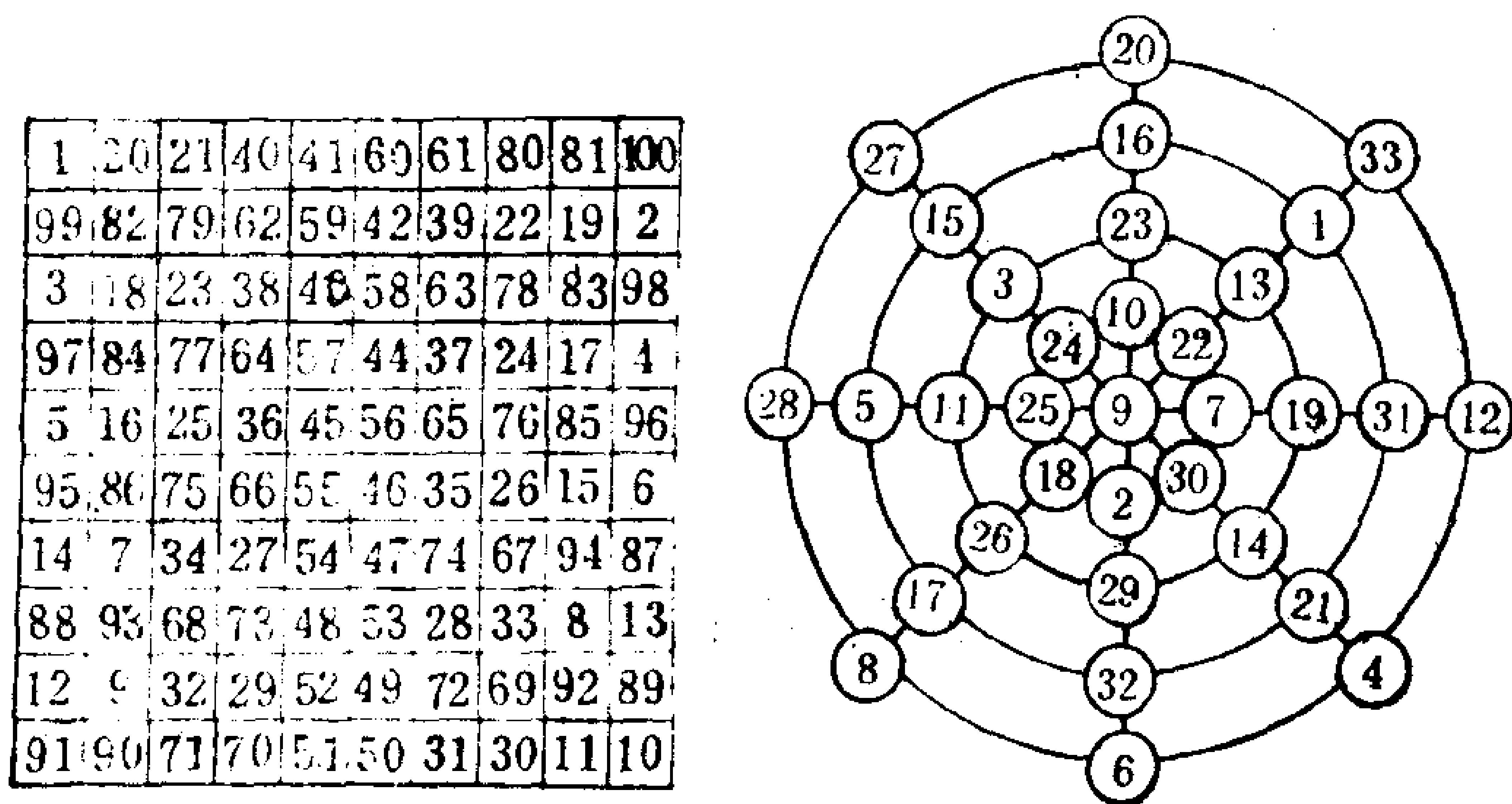
4. 纵横图——初步的组合数学思想

《易经》的数表(卦象)中就产生了古老的组合数学思想的萌芽。汉代的“九宫图”(见图4.10)是用九个数字组成一个方阵，它的各行各列和对角线上的数字之和都是15。这是最早

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图4.10

的纵横图，后世称之为“洛书”。对它，历来有许多解释，例如结合八卦的解释：按《周易》中九为老阳、六为老阴；七为少阳，八为少阴，六加九，或七加八都是15，因而“九宫图”各行各列及对角线上数之和都是15，实际上，纵横图涉及到数字组合的各种问题，一般地，就是指把从1到n^2的自然数排成纵横各有n个数，并且使同行、同列与同一对角线上的n个数的和都相等的一种方阵，其中已具有初步的组合数学思想，宋代杨辉的《续古摘奇算法》(1275年)中，收集了20多个纵横图，包括$n=3,4,5,\cdots,10$各行的纵横图，还有圆形的纵横图。图4.11示出两种纵横图，一种取$n=10$(叫“百子图”)；一种是圆形图(叫“攒九图”)。百子图各行、列及对角线上数之和为505。“攒九图”由1到33排成四个同心圆，9在中心，数排成四条直径，各直径上的数之和为147，四个同心圆上的数之和也是147。



1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

图4.11

杨辉把纵横图作为数学研究内容，收入自己的数学著作，在数学思想的发展上是有重要意义的。显然，这种纵横图在当时并没有实际应用的价值，是一种纯粹的数字组合问题，也可以说是属于数学游戏的，它们是由数学自身的发展产生出来的。它们在《周易》的初步数字组合思想的基础上又进一步地发展，可以说具有了组合数学的萌芽，它们也表明了宋代数学家采用了高度抽象的思想方法，他们在继承中国古代数学的开放的归纳体系，贯彻从实际到理论的实用思想方法的同时，也发展了抽象的逻辑思维能力，从理论出发探索新的数学规律，因而得以在宋元之际创造出一系列世界性的数学成果，在世界数学思想方法方面，长期居于先进的地位。

5. 招差术是数学抽象思维的重要成果

中国古代数学与天文历算有十分密切的关系，前面指出，为改进历法编算工作，隋唐的天文学家刘焯和一行分别创立了等间距二次内插公式和不等间距二次内插公式。元代

郭守敬编《授时历》，创用三次内插法来推算日月运行的速度和位置，推进了数学和天文历算的发展。朱世杰对这种插值问题进行了进一步地深入研究，在《四元玉鉴》中他把当时在高阶等差数列方面的研究结果运用于内插法。在"如象招数"门最后一问朱世杰的自注中提出一个问题："依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺…，今招十五日，每人日支钱二百五十文，问招兵及支钱各几何"，解此题时朱世杰用了高阶差的概念，列表解释他的作法：

			$\triangle^1$	$\triangle^2$	$\triangle^3$	$\triangle^4$
初日	方面三尺	招	$3^3=27$			
				37		
次日	方面转多一尺	招	$4^3=64$		24	
				61		6
三日	又多一尺	招	$5^2=125$		30	
				91		6
四日	又多一尺	招	$6^3=216$		36	…
				127		
五日	又多一尺	招	$7^3=343$		…	
				…		…

朱世杰的解法是："求兵者：今招为上积，又今招减一为菱草底子积为二积，又今招减二为三角底子积为三积，又今招减三为三角落一积为下积，以各差乘各积，四位并之，即招兵数也。"

用现代数学语言表示，设n日共招兵数为$f(n)$，则朱世杰的解法相当于公式：

$$f(n)=n\triangle^1+\frac{1}{2!}n(n-1)\triangle^2$$

$$+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\triangle^3$$

$$+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\triangle^4$$

由于朱世杰明确指出上式中各项的系数依次是一串"三角垛"的"积"，由此意出发，人们可以认为朱世杰已掌握了任意高次差的系数构成，因而已掌握了任意高次的招差法——插值法了[1]。当然，这种插值公式的用途不仅仅限于内插法。在西方，最先讨论插值公式的是格雷戈里(Gregory，1670年)，随后，牛顿(Newton)得出了现在通称为牛顿插值公式的一般结果。牛顿插值公式现在在数学上仍然有着重要的应用，朱世杰的公式形式上与牛顿的插值公式完全一致，而早于牛顿300余年。内插法是中国古代数学的重要成就之一。

值得注意的是，一次、二次及三次插值公式都是在历法编算的直接应用中产生的，而四次插值公式（或者说，任意次插值公式）却是在纯数学的研究中产生的，实际上，各种高阶等差数列（三角垛即其一种）就已经是抽象的数学问题了，虽然它被表述成某种具有实际背景的"垛积问题"，而朱世杰引入四次插值公式的问题似乎仍带有应用的性质，实际上却更象一种数学游戏——没有那种方式征兵的。可以说，朱世杰的《四元玉鉴》整个来说都是为解数学问题而编出来的"应用题"。就是说，四次插值公式是纯数学地得出来的，这表明宋元时期，数学中的抽象思维已得到相当的发展，采用了大量抽象的思想方法，补充了中国传统数学思想方法在这

① 杜石然：见《宋元数学史论文集》，科学出版社，1985年，第193页。

方面的缺陷。可惜的是，《四元玉鉴》发表(1303年)后，中国古代数学出现了停滞和“中断”，没有沿这种新的思想方法发展下去。

五　中国古代数学思想的主要特点

“人们的社会存在，决定人们的思想”。从根本上说，中国古代的数学思想方法，也是由中国古代社会的生产方式决定的。中国古代数学思想方法属于中国古代社会思想文化的一部分，它的主要特点还受制于中国古代的思维方式，同时它又决定着中国古代数学的基本方式和发展趋势。在前几章里，我们分析了若干历史时期的具有代表性的数学思想方法，现在我们来概括地论述一下中国古代数学思想的主要特点。

5.1 “经世致用”的实用思想

这是中国古代数学思想的典型特点之一，从《九章算术》到《数书九章》都一再表现出这种实用思想。它促使人们把数学应用于社会生产、社会生活的各个领域。这种实用思想反映了中国古代社会生产方式的需要，同时也是中国古代“经世致用”思想的一个组成部分。

经世致用是中国古代思想的一大特点，古人把经纶天下，治国济民作为理想的目标。重视的是人际关系。通常认为，古代文化有希腊、中东和中国三种类型。希腊型文化注重人与自然的关系，中东型文化注意人与神的关系，中国型文化注重人与人的关系[1]。就是这个意思。

这种思想表现在人生上，主要是入世的、积极的态度，

① “中国传统文化的特质和价值”，载《中国社会科学》，1985年，第1期。

例如"学而优则仕"，出仕的目的在于经世致用，这是中国封建社会里儒家思想的原则之一，在中国古代社会里起着长期的主导作用。

这种经世致用思想在认识上也可称为"实用理性"，指的是"与生活实际保持直接联系的实用理性，不向纵深的抽象、分析、推理的纯思辨方向发展，也不向观察、归纳、实验的纯经验论的方向发展，而是横向铺开，向事物之间相互关系、联系的整体把握方向开拓"。[1] 就是说，中国古人的思维与实用的东西的联系比较密切，也就是经世致用思想占主导地位。

在这种思想影响下，中国古代数学通常表述为一种开放的归纳体系，如《九章算术》到《数书九章》等的表述体系。实际上，就整体来说，2000年来的中国古代数学，对于社会实践是开放的，就是说数学的发展与社会实践紧密相关，随着社会实践的发展，数学不断产生出新的领域。先秦时代的社会生活和实践对数学的需要，比较集中地反映在《九章算术》和《周髀算经》中。秦汉以来，社会生产力不断发展，社会生活和实践对数学提出更多更高的要求。汉代刘歆在《三统历》中引进"上元积年"，为了计算"上元积年"，在《孙子算经》中提出了"物不知数"问题，后来发展为世界有名的"中国剩余定理"。到了宋代秦九韶创造了"大衍求一术"，系统地完成了一次同余式组的求解问题，完全解决了求"上元积年"的实际问题。为了适应实际测量的需要，刘徽创立了"勾股重差术"和"出入相补原理"，既解决了测量的计算方法，又给出了理论上的证明方法。由于天文计算和制定度量衡的标准量

① 李泽厚：《秦汉思想简议》，载《中国社会科学》，1984年，第2期。

器等方面的实际需要，祖冲之计算出有八位有效数字的圆周率和密率（祖率 $\pi=\frac{355}{113}$）。这些具有世界意义的杰出成就，都与实用思想有不可分割的联系。

汉唐期间的几部数学名著，更能说明这个问题：《孙子算经》是普及筹算知识的书，是为了实际应用数学的书；《张邱建算经》可以看作《九章算术》的续集；《五曹算经》是一部关于管理方面的数学手册；《五经算术》是为学习或讲授儒家经典的人提供有关数学解释的参考书。为了适应隋唐间大兴水利、开凿运河时计算各种土方体积的需要，产生了《缉古算经》。宋元时代，虽然人们比较重视数学本身的理论发展，但仍然十分重视社会生产和生活的实践。例如在理论上取得重大成就的秦九韶，他著《数书九章》的81个应用问题，涉及到社会生产、生活实践的各个方面，可以看作是宋代社会生活的一个缩影。至于明代以后，商业发达，珠算兴起，数学的实用色彩更为浓厚。由此可见，实用思想对中国古代数学的发展产生了重大的影响。大致说来，有如下几点。

(1)实用思想主张以社会实践作为衡量数学理论的标准，因此，中国古人开创了一种独特的数学表述体系——开放的归纳体系。中国古代大多数数学著述都是以社会生产和生活实践中的问题为纲，基本按社会生活领域进行分类。这种体系延续了1000多年，成为中国古代数学的一大特色。

(2)社会实践是产生和发展社会思想的基础，是各门科学发展的根本动力。数学也不例外。重视社会实践与数学发展相联系的实用思想，极大地促进了中国古代数学的发展，取得了一系列光辉的成就，在相当长的时期内，在数学领域处于世界的领先地位。

(3)在经世致用的实用思想影响下，数学受到中国古代统治阶级的重视，先秦的儒家就主张数学是“六艺”之一，促进了数学教育的发展。隋唐在中央大学里设“算学”，是中国，也是世界上最早的官办数学专科学校。唐至五代科举开设“明算科”，考数学中试者亦可为官，这在世界选官史上也是十分独特的。这两件大事，从公元7世纪至公元12世纪数百年间，虽然时断时续，但却在颇大的程度上促进了数学教育的普及、推动了数学的发展。这对宋元时期数学发展高峰的形成，起了重要的作用。

当然，对此也要一分为二，实用思想的一条腿走路的方式，影响了中国古代数学中形成严格的理论体系。甚至宋元时期初步产生的抽象的演绎推理的思想方法也要采用“实用”的形式，而对宋元数学后的数学“中断”，实用思想也是难辞其咎的。这些都是中国古代数学实用思想的消极影响。

5.2 “天人相应”的神秘思想

所谓神秘思想，指的是对数学的某种神秘主义的观念。例如，把数字附会于人事，利用数学来预测人事的休咎即是一种神秘思想。在中国古代，数学神秘主义思想确实是存在的。

这种神秘思想的产生可追溯到《周易》，《易》中用数来占卜，把数与万事万物联系起来，使人们通过数来预测万事万物的未来，由此产生了数是沟通天人之间的信息符号的观念，这是数学神秘思想的一个来源。认为数学能运用于“天地之道”、“神明之德”及各种人事中是数学神秘思想的主要表现形式。

这种神秘思想在中国古代历来数学家的数学观中都有所反映。

(1)赵爽在《周髀算经》序中说："故(《周髀算经》)能弥纶天地之道，有以见天地之赜"(所以说《周髀算经》能覆盖天地之道并把它们联系起来，用它能够探求天地的秘密)。

(2)刘徽在《九章算术》注文的序中说："昔在包牺氏始画八卦，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术以合六爻之变。"(远古时伏羲氏就始创八卦，用它来表述天道变化的规律，推算万物的规律，并且创造了数和数的运算来表述六爻的变法)

(3)《孙子算经》序中说："夫算者,天地之经纬,群生之元首，五常之本末，阴阳之父母，星辰之建号，三光之表里，五行之准平，四时之终始，万物之祖宗，六艺之纲纪。"(数学是宇宙的常规，众生的元始，人伦的由来，阴阳的本原，并且是星辰的标号依据，日、月、星的运行规律，阴阳五行的运行准则，一年四季的轮换标志，是产生万物的本原，是著述《六艺》的要点)。

(4)王孝通在"上《缉古算经》表"中说："臣闻九畴载叙，纪法著于彝伦；六艺成功，数术参与造化。夫为君上者司牧黔首，有神道而设教，采能事而经纶，尽性穷源莫重于算"(我听说治国大法终成定论,是因为有法规见之于伦常之中；《诗》、《书》、《礼》、《易》、《乐》、《春秋》六艺演著成书，是因为有数学参与创造化育的结果。做君王的要统治百姓，要设立神道来教化群民，要任用专能来筹划政事，这些事依据本性、追溯本原，没有比数学更重要的了。)

(5)秦九韶在《数书九章》序中说,数学"大则可以通神明，顺性命，小则可以经世务，类万物，讵容以浅近窥哉。……

爰自河图洛书闿发秘奥，八卦九畴错综精微，极而至于大衍皇极之用，而人事之变无不该，鬼神之情莫能隐矣。……要其归，则数与道非二本也”（从大处说，用数学可以通悟天道的变化，理解人的性情和运命；从小处说，用数学可以筹划日常事务，区分万事万物，怎能认为数学是浅近的学问呢。……自从黄河出图、洛水出书，阐发了上天的奥秘；而八卦和九畴则表述了天意的精微之处；数学在《大衍历》和《皇极历》中的应用使其作用发挥到顶点，这时对人事的变化无不清楚，对鬼神之事也能够完全了解。……考其原因，是因为数学与天道并不是两回事。）

(6)杨辉在《日用算法》序中说：“万物莫逃乎数。是数也，先天地而已存，后天地而已立。盖一而二，二而一者也”。（世上一切事物没有能离开数的。数在天地产生以前就已经存在了，在天地产生以后就什么也离不开数了。天地和数是一个事物的两个方面，它们实际就是同一个东西。）

从上述可见，中国古代数学中的神秘思想是源远流长的，特别是许多著名的大数学家的数学观中都包含这种思想。因而使之成为中国古代数学思想的一个特点。

应该指出的是，由于中国古代数学具有与实践密切相联系的开放体系，由于数学本身具有科学性，由于中国古代数学家都是在天文历法或手工业技术中实践着的科学家，所以中国古代数学主要是沿健康的方向发展的。从数学名著可以看出这一点，除了少数问题牵强附会地涉及“神秘性”（如《孙子算经》最后一题“推算男女”及《数书九章》第一题“蓍卦发微”为凑“用数四十有九”而违反“大衍总数术”的算法）外，大多是实际生活中遇到的问题和为引入数学结果而假设的应用题，是科学问题。可以说，中国古代数学是具有唯物主义

传统的，所以取得了一系列的光辉成就。

但是毋用讳言，数学神秘思想在中国古代数学思想中也是一直存在着的。这种神秘思想对数学的发展起着阻碍作用，它往往使数学的方法和结论成为无法由实践来检验的东西，因而无法断定其真假；并且还使数学与人事纠葛交错在一起，使数学思想政治化。由秦汉到宋元，中国古代数学有了相当大的发展，但考察中国古代数学家的数学观，如前引文，基本上没有什么重大的改变，或多或少地包含着数学神秘思想是其原因之一。数学观的保守性影响了数学思想的发展，阻碍了中国古代数学的进一步发展，这大概也是中国古代未能产生严格的理论体系的一个原因。更不能否认的是，有些数学上作出贡献的数学家，如刘歆、一行等在编算历法时附会《周易》中的“神圣的数”，自觉地散布数学神秘主义，造成很坏的影响。

5.3 算法化、数值化、离散化的计算思想

中国古代的数学著作，大多是以应用问题集的形式表述出来的。每一应用问题都用“问”与“答”，问中一般给出具体数据，答中也必得出具体数值，答其实是把问中的具体数据代入由“术”给出的算法进行数值计算的结果，从《九章算术》到《四元玉鉴》，一直保持着这一特色。这反映了中国古代的一种极其深刻的数学思想——算法化和数值化的计算思想。

1. 算法化思想

算法化是中国古代数学思想的重要特点之一，算法化思想本身就是中国古代极其重要的数学思想。中国古代的数学

著述，基本上是以算法为主要内容的。这种思想进一步发展的结果，使中国古代数学产生了独特的发展方式：各种成果无不与算法相联系着。前几章我们举出了不少算法为例，并指出由该算法取得的数学成就，这里列表（表5.1）汇总。

这些算法都取得了具有世界历史意义的重大成就。算法化思想就是要得出直接可以计算的结构和程序，为此，其一是要求数值化，其二是要求有一种“机械式”的计算步骤，并且一定是“能行性”的步骤才行。在算法化思想指导下，中国古代数学中实现了这两个要求，“术”如前面的分析，就是一个有“能行性”的机械式的计算程序，同时也实现了数值化。

2. 数值化、离散化的思想

中国人是世界上最早采用十进位值制记数法的，如第一章所述，在殷代就已创建了它。中国古人一直是长于数值计算的，中国古代数学是一种离散数学。在解决实际问题的计算中，很早就提出了负数，战国李悝（公元前 5 世纪）说，“五人终岁用千五百，不足四百五十。”居延汉简有：“负四算，得七算，相除得三算。”《九章算术》中已提出“正负术”，规定了正负数的加减运算。刘徽更明确提出：用不同色的算筹来分别表示正负数，他用红筹表正数，黑筹表负数；或用斜放的筹表负数，正放的筹表正数。印度人 7 世纪提出负数运算法则，欧洲一些人直到15、16世纪还不接受负数。杰出的数学家帕斯卡认为 0 减去 4 是无意义的。在《九章算术》中还明确地规定了分数的四则运算，欧洲人囿于无位值制的记数法，分数运算长期落后，直至印度-阿拉伯数字传入才有所改变。

在数学的发展中，中国古人习惯于把问题数值化、离散化，利用具体的数值计算来解决一系列复杂的应用问题或理

表5.1

算法	提出者	相应成就
约分术	《九章算术》	求两数最大公约数的机械化方法
割圆术	刘徽	引入极限概念，得出$\pi=3.14$，3.1416.
开方术	《九章算术》	开平方方法
开立圆术	《九章算术》 祖冲之父子	求球体积公式$V=\frac{1}{6}\pi d^3$ 祖暅原理
委粟术	《九章算术》	粮食堆积问题
盈不足术	《九章算术》	一次内插法
方程术	同上	线性方程组的"矩阵"解法
正负术	同上	引入负数及其运算规则
重差术	刘徽	勾股测量及其计算方法
"物不知数"术	《孙子算经》	中国剩余定理
百鸡术	《张邱建算经》	不定方程求解
开带从立方术	王孝通	三次方程求解
大衍求一术	秦九韶	一次同余式组求解
增乘开方术	贾宪	二项高次方程求解
正负开方术	刘益、秦九韶	任意高次方程求解
天元术	李冶	列方程，以符号表未知数
四元术	朱世杰	四元高次方程组求解，以不同符号表示不同未知数
招差术	朱世杰	四阶差分公式，任意阶差分公式

论问题，如前面所分析的，关于几何图形的许多问题在中国古代也是转化为离散的数值问题计算求解的。这种数值化、离散化的思想与中国数学中一直出色地使用数学工具——算筹——有直接的关系，可以说数值化、离散化的思想在算筹的使用中得到发展和巩固。

由于数值化思想，一般地，中国古代数学中缺乏严格的演绎论证。而且对有理数和无理数同样看待，在开方不尽时利用十进小数近似地表示之，并不会发生古希腊那样的无理数危机。而数值化的思想使中国古人在世界上最早创用了十进小数，刘徽曾指出，尺、寸、分、厘、毫、秒、忽，七个长度单位，忽以下称“微数”。“微数无名者以为分子，以10为分母”。这就是十进小数了，欧洲人则在16世纪才研究小数，相去已经上千年了。

数值化思想还促使中国古人在方程论中创造出许多光辉的成就。数值化和算法化是分不开，要进行数值计算必须有算法，算法的实施则依赖于数值。它们是相辅相成的，统一于中国古代数学的计算思想。

算法化和数值化、离散化的计算思想与数学实用思想有直接的联系，正是把数学应用到社会生产及生活的各个领域才引起了对数值化和计算机械化的要求，才促使了对算法的研究并得出算法来。

算法化和数值化、离散化的计算思想重视的是构造出可利用算筹计算的算法，并不需要探讨这种算法所依据的数学原理，因而一般地，中国古代数学倾向于回答“怎样求出结果”和“结果是什么”的问题而不回答“为什么这样作”的问题，虽然算法达到相当高明的程度，但对有关的数学原理缺乏探讨。这在一定程度上也影响了严格理论体系的建立。不过，

从另一个角度来看，算法化和数值化、离散化的计算思想不仅使中国古代数学取得若干具有世界历史意义的光辉成就，而且提供了一种用计算方法来解决问题的思想和能力。这种思想和能力在近代，特别是现代数学中得到长足的发展，计算方法已成为一种重要的一般科学方法。①

5.4 朴素的辩证思想

中国古代哲学中辩证思想极为丰富，在方法论上，辩证逻辑方法占有重要的甚至主要的地位。这种思想方法在数学中也得到反映，可以说，数学中的辩证思想也就是中国古代辩证思想的一个组成部分。

我们在本书第一章举出的《庄子》中的极限思想，第三章中举出的刘徽"割圆术"的思想就是极其典型的朴素的数学辩证思想。《九章算术》中引入负数及负数运算("正负术")，对开方不尽数的处理("开平方术")等也体现了深刻的辩证思想。

刘徽提出的"出入相补原理"表现了一种以实补虚、虚实结合的朴素的辩证方法，赵爽的"勾股弦方图"则是一种数和形辩证结合的体现。刘徽在对《九章算术》"商功"章的注解中把立体的体积计算问题，通过长方体的体积公式来求，而长方体则进一步分解为两个"堑堵"，再把"堑堵"斜剖为二，得一个"阳马"和一个"鳖臑"，分解过程见图5.1。这样，刘徽得出"阳马"的体积是"鳖臑"体积的二倍的结论。而任意四面体可以分割为六个"鳖臑"，显然这样可以解决相当多的多面体的体积计算问题。这种化整为零，再由零求整的思想也是

① 冯康：《计算—新的第三种科学方法》，载《百科知识》，1985年，第5期。

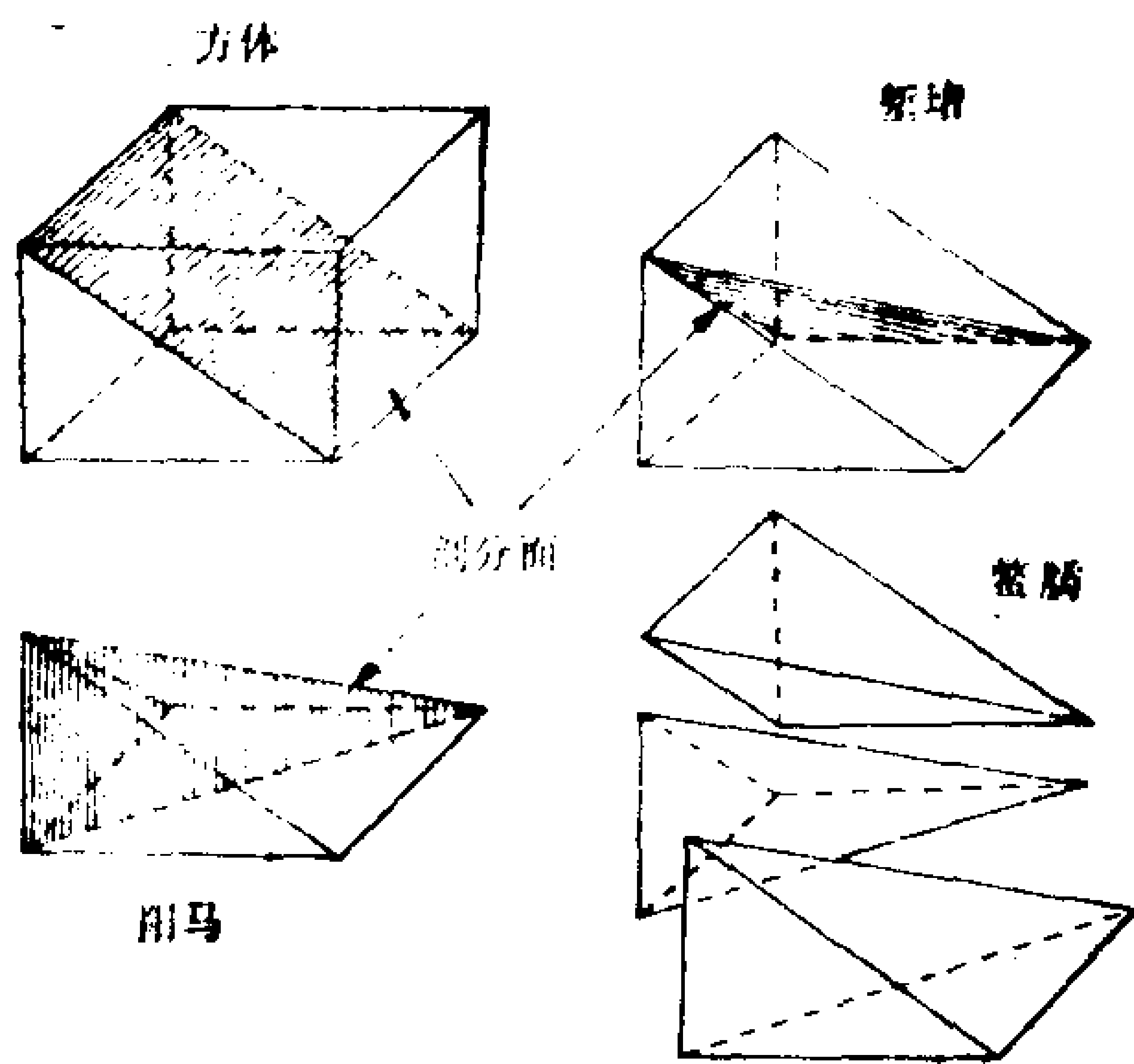


图5.

一种辩证思想。刘徽在解决体积计算问题时还再一次出色地应用了极限的概念，说明他相当成功地把握了有限和无限的辩证转化思想。

中国古代数学的朴素的辩证思想，使中国古人能从整体上、从关系和关联中把握数学的对象。许多数学成就是得益于这种辩证思想的。

5.5 正统思想

对比中国古代各个时期的数学著作，不难发现它们在形式和体例方面的趋同性，这种趋同性反映了数学思想上的保守性，而这种保守性则表现出数学思想上具有某种正统观念，这种观念具有一定的支配地位，在2000多年封建社会的数学发展中起着重要的作用，使数学著作的形式和体例保持不变，并对数学内容产生深刻的影响。我们称这种观念为“正

统思想”，它也的确体现了中国封建社会的儒家正统观念。

《九章算术》为中国古代数学著作提供了一个示范，如前章所述，后来的数学著作在体系、内容、方法上都继承发展了《九章算术》这一个示范，对中国古代数学的发展起了重要的作用。这是正统思想的积极作用。但是当这种示范成为不可变易的信条(例如达到儒家经典的程度)时，就产生了较大的消积作用。

随着数学的发展和人的智力的提高，一个必然的趋势是数学要向更高的层次发展，它能够取得超越当时社会实践需要的比较抽象的成果。中国古代数学确实也曾达到了这种高度抽象的发展层次，在宋元数学中，如前章所述，这种成果更多一些。但是这些高度抽象的结果只是以“应用问题”的形式表现出来，不能不说是因为正统思想的消积影响。不过这时由于成果超越了当时的实践，所以这些“应用问题”已不是从实践中来的，而是由于高度抽象的数学内容（算法形式的成果)的需要而编造出来的“应用问题”。如秦九韶的《数书九章》中的“遥度圆城”题就是为了建立一个10次的数字系数的方程而构造出来的“应用问题”，从正统的“问”、“答”、“术”的表述形式来说，只有这样才能引出他的高次方程的数值解法。而由于当时的生产水平，很难找出需要高次方程解决的实际问题，有人指出，只是在《授时历》(1280年)的推算过程中应用过四次方程，“此外也就很难再找到其他有实际意义的例题是需要四次或四次以上方程了”[1]。因此只好“编造”一个“应用问题”，由于编得不太好——“遥度圆城”题不是必用10次方程求解的，实际上，用3次方程就能解——因此

① 钱宝琮等:《宋元数学史论文集》，第7页。

引起了许多非议和争论。[1]

那么，一个很自然的问题就是：为什么不直接写出一个10次方程来研究解法，非要编出一个“应用”题来呢？这就是正统思想在作怪。并不只是秦九韶一人如此，李冶的《测圆海镜》也是这样，其中170题都是以各种“应用”的形式出现的，但是人们认为，其中心探讨的“天元术”，“只是在沙克什的《河防通议》(1321年)中看到它在水利方面的实际应用，但也只二次方程，并且是仅见的孤例”[2]，但是李冶因受正统思想的影响，却一定要采用实用问题的形式。朱世杰的《四元玉鉴》也如此。这种正统思想可能也是阻碍宋元高度抽象的数学思想顺利发展的原因之一吧。

总之，中国古代数学思想的体系独特、内容丰富、特点鲜明，是中国古代文化中的一颗光彩的明珠。中国古代数学思想促进了中国古代数学的长足发展，取得了一系列世界性的光辉成就，并成为现代数学思想的主要源泉之一。让我们本着辩证唯物主义和历史唯物主义的观点和方法，结合我国的实际情况分析我国古代数学思想方法的积极因素和消极因素，继承和发展我国古代数学思想方法中的积极因素，批判和克服它的消极因素，遵循“古为今用”的原则，让它为建设具有中国特色的社会主义作出应有的贡献。

---

[1] 钱宝琮等，《宋元数学史论文集》，85页。

[2] 同前，7页。

附录

中国古代数学思想方法大事年表

年　　代	大　　事　　记
70—20万年前	北京人制造出各种形状的石器
10万年前	许家窑人制造出大小不等的石球千余个
2万年前	山顶洞人制造出主体圆柱形的骨针和有缺口的骨管
6千年前	仰韶文化中的陶器和陶文中已有初步的数和形的观念
5千多年前	后汉武陵石室象赞记伏羲氏“画卦结绳”
公元前2500年	《世本》载，黄帝命“隶首作算数” 《尸子》载，黄帝命倕制造规、矩、准绳 《史记》载，帝尧命羲和“数法明星辰”，已有历数之法
公元前1400年	殷代甲骨文中已有比较完整的十进位值制记数法
公元前1400年—前900年	殷周的甲骨文、金文和陶文中都已有《周易》中所记录的“卦象”——数字画，这是最古老的数字组合思想。
公元前1100年	《周髀算经》载，商高提出勾股数的一个特例：3，4，5
公元前700年	《周髀算经》载，陈子提出一般的勾股定理
公元前700年	《周礼》载，数学为小学教育的“六艺”（礼、乐、射、御、书、数）之一
公元前500年	《墨经》中规定了数学中若干基本概念的比较科学的定义
公元前500年	《老子》中已说明算筹作为计算工具，已比较普遍地使用了。这是中国古代独具特色的比较先进的计算工具，使用了近2000年。
公元前400年	《墨经》、《管子》中都有关于分数的记载

年　　　代	大　　事　　记
公元前300年 —前200年	李悝的《法经》、"居甫汉简"都有了关于负数的记载
公元前200年 —前100年	《周髀算经》在天文计算中应用了分数运算，一次插值法，及勾股测量术
公元前200年 —公元100年	《九章算术》成书，它奠定了中国古代数学表述体系，主要内容和构成方法上的主要特点，在数学上也取得光辉的成就，例如： (1)线性方程组的建立和求解，使用了类似现今线性方程组系数增广矩阵进行变换的求解方法 (2)负数及其加减运算 (3)开方术(开平方及开立方法) (4)提出不定方程及其解法；给出相当多的勾股数组 (5)大量使用数学模型法，系统地给出筹算为工具的可行可计算的算法
公元前100年	《大戴礼》记载，发现"九宫图"，表现了初步的组合数学思想
公元263年	刘徽注《九章算术》，继承了《九章算术》的传统，并开创了定义和证明，在数学方法和数学理论上贡献很多。 (1)创立"割圆术"，在数学中应用了极限思想 (2)提出"出入相补原理"，成为中国古代数学证明的基本思想和方法之一。 (3)著《海岛算经》，发展重差术 (4)创用十进小数，并用其表示"开方不尽数"。 (5)采用"图验法"和"綦(棋，模型)验法"分析某些算法， (6)提出"牟合方盖"的概念，指出解决球体积的正确途径 (7)求出圆周率 $\pi=\frac{157}{50}=3.14$ 及 $\pi=\frac{3927}{1250}=3.1416$

年代	大事记
公元3世纪	赵爽注《周髀算经》，其中"勾股圆方图注"，证明了勾股定理，总结了"数形结合"的思想方法，利用几何图形的面积换算关系，证明了有关直角三角形三边的各种关系的命题若干条。
公元400年左右	《孙子算经》成书，阐述了算筹的用法；提出了数学的一次同余式组的求解问题，并给出了一个特解和特殊解法，提出了"中国剩余定理"的问题。
公元462年	《隋书》记载，祖冲之在圆周率计算上取得两项重大成果： (1) $3.1415926<\pi<3.1415927$ (2) 约率 $\pi=\frac{22}{7}$，密率 $\pi=\frac{355}{113}$
公元5—6世纪	李淳风注《九章算术》时指出，祖暅继承刘徽的方法，解决了圆体积的计算问题，得出 $V=\frac{1}{6}\pi d^3$；提出"祖暅原理"，《张邱建算经》成书，提出"百鸡问题"即三元一次不定方程及其一种解法，
公元600年	《皇极历》颁布，刘焯提出等间距二次内插法
公元6世纪	《隋书·百官志》载，国子寺(国立大学)设"算学"(数学专科)，这是世界上最早的数学专科学校，唐代、宋代也继续开设
公元625年	《缉古算经》成书，解决了实践中提出的三次方程的求解问题
公元7世纪	《新唐书·选举志》载，唐代科举设"明算科"，考中者授官，这种制度至少持续到公元930年。 唐代国子监算学馆规定《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《张邱建算经》、《海岛算经》、《五经算

年　　代	大　　事　　记
	术》、《缀术》、《缉古算经》十部算经为课本，后世通称"算经十书"。宋代（1084年）重刻，这时，《夏侯阳算经》和《缀术》已佚，前者代之以一部唐中叶的实用算书，仍用其名，后者代之以《数术记遗》，这种宋本《算经十书》流传至今。
公元724年	《大衍历》颁布，一行创立不等间距二次内插法。一行还领导实测了地球子午线一度之长，得122.8公里，比现测值多11公里，在世界上为第一次。
公元1050年	杨辉《黄帝九章算法细草》记述，贾宪创"开方作法本源图"，即二项展开式系数表；并得出解任意次二项方程的"增乘开方术。"
公元1088年	沈括撰《梦溪笔谈》，创"隙积术"、"会圆术"等；表述了初步的运筹思想
公元1247年	秦九韶《数书九章》成书，系统解决了： （1）一次同余式组的一般解法（"大衍求一术"） （2）一元高次方程的数值解法（"正负开方术"） 这两项成就都早于西方同类成果500多年
公元1248年	李冶《测圆海镜》成书。提出"天元术"（设未知数解方程的理论）。这是一部重视逻辑推理的杰作，发展了抽象方法
公元1261年	《详解九章算法》成书，杨辉第一次按计算方法和逻辑关系重新划分《九章算术》的问题，是按数学本身进行分类的第一本书，研究了各种纵横图，发展了初步的组合数学思想，
公元1274年	杨辉《乘除通变本末》成书，给出"九归"捷法，介绍了筹算的各种口诀（算法的一种简化形式），为后来珠算的发展创造了条件。
公元1280年	《授时历》颁布，王恂，郭守敬创三次内插法

年代	大事记
公元1303年	朱世杰《四元玉鉴》成书，开创"四元术"，其成果 （1）用不同的符号表不同的未知数 （2）解四元四次方程组的方法 还创立"招差术"，给出四次内插法，实际上得出任意阶的差分公式

主要参考文献

李冶：《测圆海镜细草》，商务印书馆，1935年。
秦九韶：《数书九章》，商务印书馆，1937年。
朱世杰，罗士琳：《四元玉鉴细草》，商务印书馆，1937年。
钱宝琮校：《算经十书》，中华书局，1963年。
白尚恕：《九章算术注释》，科学出版社，1983年。
向尚恕：《测圆海镜今译》，山东教育出版社，1985年。
李俨：《中算史论丛》，中国科学院，1954年—1955年。
李俨：《十三、十四世纪中国民间数学》，科学出版社，1957年。
李俨：《中国数学大纲》，科学出版社，1958年。
李俨、杜石然：《中国古代数学简史》，中华书局，1963年。
钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，1963年。
梁宗巨：《世界数学史简编》，辽宁人民出版社，1980年。
吴文俊主编：《九章算术与刘徽》，北京师范大学出版社，1982年。
《钱宝琮科学论文选集》，科学出版社，1983年。
李迪：《中国数学史简编》，辽宁人民出版社，1985年。
钱宝琮等：《宋元数学史论文集》，科学出版社，1985年。
严敦杰：《中学数学课程中的中算史材料》，人民教育出版社，1985年。
李逢平：《中国古算题选解》，科学普及出版社，1985年。
《中学数学教师手册》，上海教育出版社，1986年。
沈康身：《中算导论》，上海教育出版社，1986年。
吴文俊主编：《秦九韶与数书九章》，北京师范大学出版社，1987年。
吴文俊主编：《中国数学史论文集》(一)、(二)，山东教育出版社。
朱绍侯主编：《中国古代史》，福建人民出版社，1982年。
肖萐父等：《中国哲学史》，人民出版社，1982年。

李泽厚：《中国古代思想史论》，人民出版社，1986年。
杜石然等：《中国科学技术史稿》，科学出版社，1981年。
徐利治：《数学方法论选讲》，华中工学院出版社，1983年。
毛礼锐主编：《中国教育史简编》，教育科学出版社，1984年。
李一氓主编：《中国古代文化史讲座》，中国广播电视大学出版社，1984年。
中国天文学史整理研究小组：《中国天文学史》，科学出版社，1981年。
唐明邦等编：《周易纵横录》，湖北人民出版社，1986年。
朱伯崑：《易学哲学史》，北京大学出版社，1986年。
刘大均：《易经概论》，山东人民出版社，1986年。
孙振声：《白话易经》，(台湾)星光出版社，1984年。
方孝博：《墨经中的数学和物理学》，中国社会科学出版社，1983年。
冯契：《中国古代哲学的逻辑发展》上册，上海人民出版社，1983年。
《中国大百科全书》天文学、考古学、教育等卷。
[英]李约瑟：《中国科学技术史》第3卷，科学出版社，1981年。
Б. рохин, А.И. Числ. и Мистика Изд «Донбас», 1975.
B.L.Van der Waerden, Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, New York, 1983.
以及《自然辩证法通讯》、《数学通报》，《自然科学史研究》，《中国社会科学》等杂志上的有关论文若干篇。